

# M A T E M A T I C K Á   A N A L Ý Z A   I I I

z přednášek Doc. RNDr. Jana Rataje, CSc.

v zimním semestru akademického roku 2010/2011

zapsal Richard Dobřichovský

## DISCLAIMER

Tento text je poskytován “tak jak je” bez jakékoli záruky.

Je možné, a velice pravděpodobné, že se v textu vyskytnou chyby a nedostatky; tyto se budu snažit co nejvíce eliminovat, pokud máte zájem disponovat aktuální verzí, najdete ji vždy na <http://porscher.wz.cz/mff/>. Je jasné, že bez vaší pomoci chyby odstranit nejde - narazíte-li tedy na nějakou chybu či nesrovnalost, nebojte se mne kontaktovat na [dobrichovsky@gmail.com](mailto:dobrichovsky@gmail.com). Pomůžete tak sobě, mně a především ostatním připravujícím-se na zkoušku, ať už teď, nebo v příštích letech.

Tato verze byla vygenerována dne 4.2.2011.

## PODĚKOVÁNÍ

*Doc. RNDr. Janu Ratajovi, CSc.* za přednášky

*RNDr. Naděždě Krylové, CSc.* za cvičení, poznámky a opravy

*Milanu Ježkovi* za půjčování sešitu, poznámky a opravy

*Robertu Husákovi* za poznámky a opravy

*Miroslavu Chomutovi* za poznámky a opravy

## Obsah

1	Vícerozměrný Riemannův integrál	3
2	Posloupnosti a řady funkcí	9
3	Fourierovy řady	24
4	Metrické prostory, část II.	28

Přednáška 4.10.2010

## 1 Vícerozměrný Riemannův integrál

**Definice:**  $n$ -rozměrný interval (box)

$$I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]; \quad -\infty < a_i < b_i < \infty; \quad i = 1, \dots, n$$

objem boxu:  $|I| = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$

Dělení boxu na "podboxy":

$\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \cdots \times \mathcal{D}_n$ , kde  $\mathcal{D}_i = \{a_i = t_i^0 < t_i^1 < \cdots < t_i^{k_i} = b_i\}$  je dělení  $[a_i, b_i]$ ,

tedy  $\mathcal{D} = \{[t_1^{j_1-1}, t_1^{j_1}] \times \cdots \times [t_n^{j_n-1}, t_n^{j_n}] : 1 \leq j_i \leq k_i, i = 1, \dots, n\}$

norma dělení  $\mathcal{D}$ :  $v(\mathcal{D}) = \max_{1 \leq i \leq n} v(\mathcal{D}_i)$

Mějme omezenou funkci  $f : I \mapsto \mathbb{R}$  a dělení  $\mathcal{D}$ .

$s(f, \mathcal{D}) = \sum_{J \in \mathcal{D}} |J| \inf_J f$  nazveme dolním součtem  $f$  vzhledem k  $\mathcal{D}$

$S(f, \mathcal{D}) = \sum_{J \in \mathcal{D}} |J| \sup_J f$  nazveme horním součtem  $f$  vzhledem k  $\mathcal{D}$

$\int_I f = \sup_{\mathcal{D}} s(f, \mathcal{D})$  - dolní Riemannův integrál z  $f$

$\int_I f = \inf_{\mathcal{D}} S(f, \mathcal{D})$  - horní Riemannův integrál z  $f$

Jsou-li si rovny, definujeme Riemannův integrál z  $f$ :

$$\int_I f = \int_I f = \int_I f$$

$\mathcal{R}(I) = \{f : I \mapsto \mathbb{R} \text{ takové, že existuje } \int_I f\}$

Značení: píše se  $\int_I f = \int_I f(x, y) dx dy$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}^2$

Poznámka: Platí analogická tvrzení jako pro jednorozměrný integrál.

**Věta 1.1:**  $f : I \mapsto \mathbb{R}$  omezená

$$f \in \mathcal{R}(I) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \mathcal{D} : S(f, \mathcal{D}) - s(f, \mathcal{D}) < \varepsilon.$$

**Věta 1.2:**  $f : I \mapsto \mathbb{R}$  spojitá  $\Rightarrow f \in \mathcal{R}(I)$ .

**Poznámka k důkazu:**

$f$  spojitá  $\Rightarrow f$  stejnoměrně spojitá na  $I$ .  $\mathcal{D}$  dělení, aby  $\forall J \in \mathcal{D} : \sup_J f - \inf_J f < \varepsilon$ .

Dále použijeme větu 1.1.

**Definice:**  $X, Y$  metrické prostory,  $f : X \mapsto Y$ .  $f$  je stejnoměrně spojitá, jestliže  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x, y \in X : d_X(x, y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ .

**Věta 1.3:**  $f : K \mapsto \mathbb{R}$  spojitá,  $K$  kompaktní  $\Rightarrow f$  je stejnoměrně spojitá.  
Připomenutí: každý box je kompaktní.

**Definice:**  $N \subseteq \mathbb{R}^n$  je nulová množina (množina nulové (Lebesgueovy) míry), jestliže  $\forall \varepsilon > 0$  existuje posloupnost boxů  $I_1, I_2, \dots$  taková, že  $N \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$  a platí

$$\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < \varepsilon.$$

**Poznámky:**

1. Každá spočetná množina je nulová.

$$N = \{x_1, x_2, \dots\}, x_i \in I_i, |I_i| < \frac{\varepsilon}{2^i}, \sum_i |I_i| < \varepsilon, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \varepsilon.$$

2. žádný box není nulová množina

3. existují nespočetné nulové množiny (příklad bude).

**Definice:**  $X, Y$  metrické prostory,  $f : X \mapsto Y$ ,  $\mathcal{D}_f = \{x \in X : f \text{ není spojitá v } x\}$  (body nespojitosti  $f$ ).

**Věta 1.4** (Lebesgne):  $f : I \mapsto \mathbb{R}$  omezená.  $I \subseteq \mathbb{R}^n$  box. Pak  $f \in \mathcal{R}(I) \Leftrightarrow \mathcal{D}_f$  je nulová množina.

**Idea důkazu** v případě  $n = 1$ :

$$\Leftarrow: \sum_i |I_i| < \varepsilon$$

**Důsledek:**  $f, g \in \mathcal{R}(I) \Rightarrow$

a)  $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(I)$  (a platí  $\int_I (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_I f + \beta \int_I g$ ),  $\mathcal{D}_{\alpha f + \beta g} \subseteq \mathcal{D}_f \cup \mathcal{D}_g$

b)  $f \circ g \in \mathcal{R}(I)$

c)  $\max\{f, g\} \in \mathcal{R}(I)$

**Důsledek:**  $f \geq 0, f \in \mathcal{R}(I), \int_I f = 0 \Rightarrow \{x : f(x) > 0\}$  je nulová množina.

**Důkaz:**  $\{x : f(x) > 0\} \subseteq \mathcal{D}_f$ .

**Věta 1.5** (Fubini):  $I \subseteq \mathbb{R}^m, J \subseteq \mathbb{R}^n$  boxy,  $f : I \times J \mapsto \mathbb{R}$  omezená,  $f \in \mathcal{R}(I \times J)$ . Pak následující tři integrály existují a rovnají se:

$$\int_{I \times J} f = \int_I \left( \int_J f(x, y) dy \right) dx = \int_J \left( \int_I f(x, y) dx \right) dy. \quad (x \in I, y \in J).$$

**Příklad:**  $\int_{[0,1]^2} (x+2y)^3 dx dy = \int_0^1 \left( \int_0^1 (x+2y)^3 dy \right) dx = \int_0^1 \left[ \frac{(x+2y)^4}{4} \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 \frac{(x+2)^4 - x^4}{4} dx = \left[ \frac{(x+2)^5 - x^5}{20} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{3^5 - 1 - 2^5 + 0}{20} = \frac{243 - 1 - 32}{20} = \frac{21}{4} = \int_0^1 \left( \int_0^1 (x+2y)^3 dx \right) dy$

$$2y)^3 dx) dy = \int_0^1 \left[ \frac{(x+2y)^4}{4} \right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^1 \frac{(1+2y)^4 - (2y)^4}{4} dy = \left[ \frac{(1+2y)^5 - (2y)^5}{10} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{3^5 - 2^5 - 1}{40} = \frac{21}{4}.$$

**Definice:**  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  omezená,  $\partial E$  nulová množina  $\Rightarrow \chi_E(x) = \begin{cases} 1 \dots x \in E \\ 0 \dots x \notin E \end{cases}$

(Charakteristická funkce množiny  $E$  - platí  $\chi_E \in \mathcal{R}(I)$  pro každý box  $I \supseteq E$ )

Objem  $E$ :  $\text{vol } E = \int_I \chi_E$

Cvičení:  $\text{vol } E$  nezávisí na volbě boxu  $I \supseteq E$ .

Přednáška 11.10.2010

**Důkaz věty 1.5:** označíme  $\varphi(x) = \int_J f(x, y) dy$

(1)  $\varphi \stackrel{?}{\in} \mathcal{R}(I)$

(2)  $\int_I \varphi \stackrel{?}{=} \int_{I \times J} f$

Víme:  $\forall \varepsilon > 0 \exists \mathcal{D}$  dělení  $I \times J$  takové, že  $s(f, \mathcal{D}) > \int_{I \times J} f = \varepsilon$ .

$\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$ , kde  $\begin{cases} \mathcal{D}_1 \text{ dělení } I \\ \mathcal{D}_2 \text{ dělení } J \end{cases}$

$$\int_{I \times J} f - \varepsilon < s(f, \mathcal{D}) = \sum_{K \in \mathcal{D}} |K| \inf_K f = \sum_{A \times B \in \mathcal{D}} |A| \cdot |B| \underbrace{\inf_{x \in A, y \in B} f(x, y)}_{\inf_{x \in A} (\inf_{y \in B} f(x, y))} = \sum_{A \in \mathcal{D}_1} \sum_{B \in \mathcal{D}_2} |A| \inf_{x \in A} (|B| \inf_{y \in B} f(x, y)) \leq$$

$$\sum_{A \in \mathcal{D}_1} |A| \inf_{x \in A} \underbrace{\sum_{B \in \mathcal{D}_2} (|B| \inf_{y \in B} f(x, y))}_{s(f(x, \cdot), \mathcal{D}_2)}$$

$$\left( \sum_{i=1}^n \inf_u g_i(u) \leq \inf_u \sum_{i=1}^n g_i(u) \right)$$

$$= \sum_{A \in \mathcal{D}_1} |A| \inf_{x \in A} s(f(x, \cdot), \mathcal{D}_2) \stackrel{\text{def.}}{\leq} \sum_{A \in \mathcal{D}_1} |A| \inf_{x \in A} \underbrace{\int_J f(x, y) dy}_{\int_J f(x, y) dy} = \sum_{A \in \mathcal{D}_1} |A| \inf_{x \in A} \varphi_*(x)$$

!!  $\varphi_*(x), \varphi^*(x) = \int_J f(x, y) dy$

Stejně dostaneme:  $\exists \mathcal{D}' = \mathcal{D}'_1 \times \mathcal{D}'_2$  dělení  $I \times J$  tak, že

$$\int_{I \times J} f + \varepsilon > \mathcal{S}(f, \mathcal{D}') \geq \dots \geq \sum_{A \in \mathcal{D}'_1} |A| \sup_{x \in A} \varphi^*(x).$$

$$\int_{I \times J} f - \varepsilon \leq \sum_{A \in \mathcal{D}_1} |A| \inf_{x \in A} \varphi_*(x) \leq \sum_{A \in \mathcal{D}_1} |A| \sup_{x \in A} \varphi^*(x) \leq \int_{I \times J} f + \varepsilon. (\forall \varepsilon > 0)$$

$$\Rightarrow \sup_{\mathcal{D}_1} \sum_{A \in \mathcal{D}_1} |A| \inf_{x \in A} \varphi_*(x) = \inf_{\mathcal{D}'_1} \sum_{A \in \mathcal{D}'_1} |A| \sup_{x \in A} \varphi^*(x)$$

$$\Rightarrow \int_I \varphi_* = \int_I \varphi^* \Rightarrow \int_I \varphi_* = \int_I \varphi^* \text{ (existují a rovnají se)}$$

$$\varphi_* \leq \varphi^*$$

$$\Rightarrow \int_I \underbrace{(\varphi^* - \varphi_*)}_{\geq 0} = 0$$

$\varphi^*(x) = \varphi_*(x)$  až na nulovou množinu.

Tedy  $\varphi(x) = \int_J f(x, y) dy$  existuje pro všechna  $x$  až na nulovou množinu a platí

$$\varphi \in \mathcal{R}(I), \int_I \varphi = \int_{I \times J} f.$$

**Připomenutí:** vol  $E = \int_I \chi_E, (E \leq I)$

Existuje, pokud  $\partial E$  je nulová množina.

$$x \mapsto \chi_E(x) \dots \mathcal{D}_{\chi_E} = \partial E$$

$$\partial E = \overline{E} \cap \mathbb{R}^n \setminus E$$

**Příklad:**

$E = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\} \partial E = \{x^2 + y^2 = 1\}$  je nulová množina.

**Definice:**

$\int_E f = \int_I f \cdot \chi_E$ ,  $E \subseteq I$  omezená - existuje, pokud  $\mathcal{D}_f$  a  $\partial E$  jsou nulové.

**Značení:** necht'  $E \subseteq I \times J$  omezená,  $I, J$  boxy

$x \in I \dots E^{x,\cdot} = \{y \in J : (x, y) \in E\}$  řez množiny  $E$  v  $x \in I$

$y \in J \dots E^{\cdot,y} = \{x \in I : (x, y) \in E\}$

Projekce: (obrázek 1)

$\pi_1 E = \{x \in I : \exists y \in J, (x, y) \in E\}$

$\pi_2 E = \{y \in J : \exists x \in I, (x, y) \in E\}$ .

**Důsledek (Fubini):**  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  omezená,  $\partial E$  nulová,  $f : E \mapsto \mathbb{R}$  omezená. Necht'

$\int_E f$  existuje. Pak existují integrály a rovnají se:

$$\int_E f = \int_{\pi_1 E} \left( \int_{E^{x,\cdot}} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\pi_2 E} \left( \int_{E^{\cdot,y}} f(x, y) dx \right) dy.$$

**Příklad:** Spočtete plochu trojúhelníku (obrázek 2):

$$\text{plocha } T = \begin{cases} \int_0^1 \int_{3-3x}^{3-\frac{3}{2}x} 1 dy dx + \int_1^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}x} 1 dy dx = \int_0^1 \frac{3}{2} x dx + \int_1^2 (3 - \frac{3}{2}x) dx = \frac{3}{4} + 3 - \frac{3}{2} \frac{4-1}{2} = \frac{3}{4} + 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{2} \\ \int_0^3 \int_{1-\frac{y}{3}}^{2-\frac{2}{3}y} dx dy = \int_0^3 (1 - \frac{y}{3}) dy = 3 - \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

**Ještě k nulovým množinám:**

$E$  je nulová  $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists$  boxy  $I_1, I_2, \dots, E \subseteq \bigcup_i I_i : \sum_i |I_i| < \varepsilon$ .

Poznámka:  $E_1, E_2, \dots$  nulové množiny  $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$  je nulové.

**Důkaz:**  $\forall i \dots E_i \subseteq I_i^1 \cup I_i^2 \cup I_i^3 \cup \dots$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |I_i^j| < \frac{\varepsilon}{2^i}$$

$$\left( \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1 \right)$$

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} I_i^j$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |I_i^j| < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon.$$

**Příklad:** Existuje nespočetná nulová množina v  $\mathbb{R}^1$ .

$[0, 1] = E_0 \supseteq E_1 \supseteq E_2 \supseteq \dots$

$E_k \dots$  sjednocení  $2^k$  uzavřených intervalů délky  $\frac{1}{3^k}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

$E = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k \dots$  nespočetná nulová.

$$E \subseteq E_k = I_k^1 \cup \dots \cup I_k^{2^k}; \sum_{j=1}^{2^k} |I_k^j| = 2^k \cdot \frac{1}{3^k} = \left(\frac{2}{3}\right)^k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty.$$

$x \in [0, 1] \dots$  reprezentace v trojkové soustavě:  $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i}$ ,  $x_i \in \{0, 1, 2\}$ ,  $x =$

$(x_1, x_2, x_3, \dots)$

$x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ ,  $x_i \neq 1 \forall i$

$\Rightarrow x \in E \Rightarrow E$  je nespočetná.

$E \dots$  Cantorovo diskontinuum.

Přednáška 18.10.2010

### Substituce

**Připomenutí:**  $f : \varphi([a, b]) \mapsto \mathbb{R}$

$$\int_a^b f \circ \varphi(t) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx$$

**Definice:**  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  otevřená, neprázdná,  $\varphi : U \mapsto \mathbb{R}^n$

$\varphi$  je **regulární** na  $U$ , jestliže:

- (a)  $\varphi$  je třídy  $C^1$  (tzn. existují spojité parciální derivace 1. řádu na  $U$ .)
- (b)  $\varphi$  je prosté na  $U$
- (c)  $D\varphi(u)$  má hodnost  $n \forall u \in U$

**Motivační příklad:**  $I \subseteq \mathbb{R}^n$  box,  $L : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$  lineární

vol  $L(I) = ?$

platí: vol  $L(I) = |\det L| \cdot |I|$

$$L = \begin{pmatrix} - & u_1 & - \\ - & u_2 & - \\ & \vdots & \\ - & u_n & - \end{pmatrix}$$

bud'  $\|v\| = 1, v \perp u_i \forall i \leq n-1$

vyjádříme  $u_n = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{n-1} u_{n-1} + \beta v; \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \beta \in \mathbb{R}$

$$\det L = \beta \det \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ v \end{pmatrix}$$

**Definice:**  $\varphi : U \mapsto \mathbb{R}^n$  regulární,  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  otevřená

$\mathcal{J}\varphi(u) \stackrel{\text{def.}}{=} \det D\varphi(u) \dots$  Jakobián zobrazení  $\varphi$  v bodě  $u$ . (Zřejmě  $\mathcal{J}\varphi(u) \neq 0$ .)

**Věta 1.8** (o substituci):  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  omezená,  $\partial A$  nulová množina

$\varphi : \text{int } A \mapsto \mathbb{R}^n$  regulární;  $f : \varphi(A) \mapsto \mathbb{R}$ .

Pak  $\int_A (f \circ \varphi) |\mathcal{J}\varphi| = \int_{\varphi(A)} f$ , má-li jeden z integrálů smysl.

**Příklad 1:** polární substituce  $\varphi : (r, t) \mapsto (r \cos t, r \sin t), r > 0, \varphi \in (0, 2\pi)$

$U = (0, \infty) \times (0, 2\pi)$

$\varphi(U) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\}$

$L_0$  : nulová množina

$$\begin{aligned} \iint_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} \frac{dx dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} r dr dt = 2\pi \int_0^1 \frac{r dr}{\sqrt{1-r^2}} = \\ &= \left[ \begin{array}{l|l} s = 1 - r^2 & x = r \cos t \\ ds = -2r dr & y = r \sin t \end{array} \middle| \varphi(A) = \{x^2 + y^2 \leq 1\} \setminus L_0 \right] = \pi \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{s}} = \pi [2\sqrt{s}]_0^1 = \\ &2\pi \\ \mathcal{J}\varphi(r, t) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos t & -r \sin t \\ \sin t & r \cos t \end{vmatrix} = r. \end{aligned}$$



**Příklad 2:** sférické souřadnice 
$$\begin{cases} [c|c]x = r \cos u \cos v & r > 0 \\ y = r \sin u \cos v & u \in (0, 2\pi) \\ z = r \sin v & v \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

$$\mathcal{J}\varphi(r, u, v) = \begin{vmatrix} \cos u \cos v & -r \sin u \cos v & -r \cos u \sin v \\ \sin u \cos v & r \cos u \cos v & -r \sin u \sin v \\ \sin v & 0 & r \cos v \end{vmatrix} = \sin v (r^2 \sin^2 u \sin v \cos v + r^2 \cos^2 u \sin v \cos v) + r \cos v (r \cos^2 u \cos^2 v + r \sin^2 u \cos^2 v) = r^2 \sin v \sin v \cos v + r^2 \cos v \cos^2 v = r^2 \cos v$$

$$\iiint_{\{x^2+y^2+z^2 < 1\}} z^2 dx dy dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \sin^2 v r^2 \cos v dr du dv = \int_0^{2\pi} du \cdot \int_0^1 r^4 dr \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 v \cos v dv =$$

$$2\pi \frac{1}{5} \int_{-1}^1 p^2 dp = \frac{2\pi}{5} \frac{2}{3} = \frac{4\pi}{15}$$

$$(\sin v = p, \cos v dv = dp)$$

## 2 Posloupnosti a řady funkcí

### 2.1. Komplexní čísla

**Definice:**  $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \dots$  množina komplexních čísel  
sčítání a násobení skaláru (jako v  $\mathbb{R}^2$ )

$$z \in \mathbb{C} \dots z = (x, y)$$

$i = (0, 1) \dots$  imaginární jednotka

$$z = x + iy \begin{cases} x = \operatorname{Re} z \text{ (reálná část)} \\ y = \operatorname{Im} z \text{ (imaginární část)} \end{cases}$$

**Definice:** operace násobení na  $\mathbb{C}$

$$z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$$

$$z_1 \cdot z_2 \stackrel{\text{def.}}{=} (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1); i^2 = -1$$

- násobení je komutativní a asociativní
- $1 = 1 + i0$  je jednotkovým prvkem vzhledem k násobení
- $\forall z \neq 0, z \in \mathbb{C} \exists z^{-1} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}; (z = x + iy)$

**Tvrzení 2.1:**  $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$  je komutativní těleso.

**Poznámka:** Na  $\mathbb{C}$  nelze definovat uspořádání, abychom dostali uspořádané těleso rozšiřující  $(\mathbb{R}, <)$ .

**Důkaz** sporem: nechtě  $(\mathbb{C}, <)$  je uspořádané těleso.

$$i \neq 0 \begin{cases} i > 0 \Rightarrow i \cdot i > 0 \cdot i \Rightarrow -1 > 0 \dots \text{spor} \\ i < 0 \Rightarrow i \cdot (-i) < 0 \cdot (-i) \Rightarrow 1 < 0 \dots \text{spor} \end{cases}$$

**Definice:**  $z \in \mathbb{C}, z = x + iy \dots \bar{z} = x - iy \in \mathbb{C}$  je komplexně sdružené číslo k číslu  $z$ .

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \dots \text{absolutní hodnota komplexního čísla } z.$$

**Poznámka:**  $|z| = \|(x, y)\|$

Tedy pro  $|\cdot|$  platí trojúhelníková nerovnost.

$(z_n) \dots$  posloupnost komplexních čísel,  $z \in \mathbb{C}$

$z_n \rightarrow z, n \rightarrow \infty, \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} |z_n - z| \rightarrow 0.$

(Totéž jako konvergence v  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ )

**Tvrzení 2.2:**  $[z_n = x_n + iy_n \rightarrow x + iy = z] \Leftrightarrow x_n \rightarrow x \wedge y_n \rightarrow y.$

**Důkaz:**  $\max\{|x_n - x|, |y_n - y|\} \leq |z_n - z| \leq |x_n - x| + |y_n - y|$

(bylo,  $\sqrt{\sum a_i^2} \leq \sum |a_i|$ )

**Připomenutí** - Bolzano-Cauchyova podmínka konvergence (věta 3.8 LS '09):

$(z_n)$  konverguje  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall m, n > n_0 : |z_m - z_n| < \varepsilon.$

**Definice:**  $z_n \in \mathbb{C} \dots \sum_{n=0}^{\infty} z_n$  konverguje, jestliže  $s_n = \sum_{k=0}^n z_k \rightarrow s \in \mathbb{C}.$

**Tvrzení 2.3:**  $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n| < \infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} z_n$  konverguje.

(Důkaz z Bolzano-Cauchyovy podmínky.)

Přednáška 25.10.2010

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n, z_n \in \mathbb{C}$$

$$s_n = z_0 + \dots + z_n \in \mathbb{C}$$

$$s_n \rightarrow s \in \mathbb{C} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} z_n = s.$$

**Věta 2.4** (Dirichletovo a Abelovo Kriterium konvergence řady):

$a_n \in \mathbb{C}, b_n \geq 0, (b_n)$  nerostoucí. Pak  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$  konverguje, je-li splněna některá z podmínek:

[Abelovo kriterium:]  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  konverguje;

[Dirichletovo kriterium:]  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  má omezené částečné součty a  $b_n \rightarrow 0$ .

**Poznámka:** Leibnitzovo kriterium plyne z Dirichletova:  $a_n = (-1)^n$ .

**Příklad:**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$  konverguje ( $x > 0$ ).

**Důkaz:**  $a_n = \sin(nx), b_n = \frac{1}{n}$ .

?  $\sum a_n$  má omezené částečné součty

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

$$2 \sin \frac{x}{2} \sum_{k=1}^n \sin kx = \sum_{k=1}^n (\cos(\frac{1}{2} - k)x - \cos(\frac{1}{2} + k)x) = \cos \frac{x}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})x$$

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin kx \right| = \left| \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} \right| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|} \cdot (\sin \frac{x}{2} \neq 0).$$

**Důkaz Dirichletova kriteria**

$b_n \geq 0$ : Buď dáno  $\varepsilon > 0$ .

$\exists n_0, 0 < b_{n_0} < \varepsilon$

$s_n = a_0 + \dots + a_n; \exists M : |s_n| \leq M < \infty \forall n$ .

Podle BC kriteria potřebujeme dokázat:

$$\exists n_1 \forall n > m > n_1 : \left| \sum_{k=m+1}^n a_k b_k \right| < \varepsilon.$$

$$a_{m+1} b_{m+1} + a_{m+2} b_{m+2} + \dots + a_n b_n =$$

$$= (s_{m+1} - s_m) b_{m+1} + (s_{m+2} - s_{m+1}) b_{m+2} + \dots + (s_n - s_{n-1}) b_n =$$

$$= s_{m+1} \underbrace{(b_{m+1} - b_{m+2})}_{\geq 0} + s_{m+2} \underbrace{(b_{m+2} - b_{m+3})}_{\geq 0} + \dots + s_{n-1} \underbrace{(b_{n-1} - b_n)}_{\geq 0} - s_m b_{m+1} +$$

$$s_n b_n$$

$$\left| \sum_{m+1}^n a_k b_k \right| \leq M(b_{m+1} - b_n) + 2M b_{m+1} \leq 3M b_{m+1} < 3M \varepsilon \text{ pro } m > n_0.$$

## 2.2. Funkce komplexní proměnné

$$D \subseteq \mathbb{C}, f : D \mapsto \mathbb{C}$$

$$f = f_1 + i f_2 = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$$

značení:

$$U_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$$

$P_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$   
 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ , spojitost  $f$  v  $z_0$  jako v  $\mathbb{R}^2$ .

**Definice:** Nechť funkce  $f$  je definována na nějakém okolí bodu  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Derivaci  $f$  v bodě  $z_0$  definujeme  $f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$  pokud limita existuje (v  $\mathbb{C}$ ).

**Poznámka:** Nelze derivovat zvlášť reálnou a imaginární část.

**Tvrzení 2.5:** Existuje-li  $f'(z_0) \in \mathbb{C}$ , pak je  $f$  v bodě  $z_0$  spojitá.

**Důkaz:**  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) - f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} (z - z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} (to\ je\ f'(z_0)) \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) (to\ je\ 0) = 0$ .

**Cvičení:**  $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = 0$ ,  $h(z)$  omezená na  $P_\varepsilon(z_0) \Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} g \cdot h(z) = 0$ .

**Příklad:**  $(z^n)' = nz^{n-1}$  ( $n \in \mathbb{N}$ )

**Tvrzení 2.6:**  $f' = 0$  na  $\mathbb{C} \Rightarrow f$  je konstantní v  $\mathbb{C}$ .

**Důkaz:**  $f = f_1 + if_2$ ,  $g(x) = f(x, 0)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g = g_1 + ig_2$

$$g'(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(x+t) - g(x)}{t} = \lim_{(t,s) \rightarrow (0,0)} \frac{f((x,y)+(t,s)) - f(x,y)}{t+is} = 0.$$

$0 = g'(x) = g_1'(x) + ig_2'(x) \Rightarrow g_1'(x) = g_2'(x) = 0 \Rightarrow g_1, g_2$  jsou konstantní  
 $\Rightarrow f$  je konstantní na  $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ .

vezmeme  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq b$

$$g(t) = f((1-t)a + tb), t \in \mathbb{R}$$

$g'(t) = 0 \Rightarrow g$  konstantní  $\Rightarrow g(0) = g(1) \Rightarrow f(a) = f(b) \Rightarrow f$  je konstantní.

**Věta 2.7** (Cauchy-Riemannovy podmínky existence derivace komplexní funkce)

Nechť  $f = f_1 + if_2$  je definována na okolí bodu  $z_0 \in \mathbb{C}$ ; značíme  $z = x + iy$ .

Pak  $f'(z_0)$  existuje právě tehdy, když existují  $\frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0)$ ,  $\frac{\partial f_1}{\partial y}(z_0)$ ,  $i = 1, 2$  a platí

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(z_0), \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0).$$

$$f = f_1 + if_2$$

$$f(z) = f(x + iy)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x}, \frac{\partial f_i}{\partial y}, i = 1, 2$$

$$\frac{1}{i} = -i$$

Pak platí:  $f'(z_0) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0)$

**Důkaz**  $\Rightarrow f'(z_0) = \lim_{t \rightarrow 0, t \in \mathbb{R}} \frac{f(z_0+t) - f(z_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0, t \in \mathbb{R}} \frac{f(z_0+it) - f(z_0)}{it} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_1(x_0+t, y_0) - f_1(x_0, y_0)}{t} +$   
 $i \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_2(x_0+t, y_0) - f_2(x_0, y_0)}{t} = (-i) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_1(x_0, y_0+t) - f_1(x_0, y_0)}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_2(x_0, y_0+t) - f_2(x_0, y_0)}{t}$ .

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, x \in \mathbb{R}$$

### 2.3. Mocninné řady

**Definice:**  $e^z = \exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ .

**Poznámka:**  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$  konverguje absolutně  $\forall z \in \mathbb{C}$ :

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!}$  konverguje podle podílového kritería:  $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{|z|}{k+1} \rightarrow 0$ .

Přednáška 1.11.2010

**Tvrzení 2.8:**  $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$ ,  $z, w \in \mathbb{C}$

**Důkaz:**  $z_0 \in \mathbb{C}$  pevné

$$(e^z)' = (1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots)' \stackrel{v.2.11}{=} 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots = e^z$$

Označím  $g(z) = e^z \cdot e^{z_0-z}$

$$g'(z) = e^z \cdot e^{z_0-z} - e^z \cdot e^{z_0-z} = 0$$

$\Rightarrow g = \text{konstantní na } \mathbb{C}$

$$e^0 = 1, g(0) = e^{z_0} \Rightarrow e^{z_0} = e^z \cdot e^{z_0-z} \forall z \in \mathbb{C}$$

$$e^{w+z} = e^z \cdot e^w. (z_0 - z = w, z_0 = z + w).$$

**Důsledek:**  $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$ ,  $z \in \mathbb{C}$

$$e^z \neq 0 \forall z \in \mathbb{C}$$

**Mocninná řada:**  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$  (\*)

$z_0 \in \mathbb{C} \dots$  střed mocninné řady

$a_k \in \mathbb{C} \dots$  koeficienty

**Tvrzení 2.9:** Jestliže (\*) konverguje pro nějaké  $z \in \mathbb{C}$  a  $w \in \mathbb{C}$  splňuje  $|w - z_0| < |z - z_0|$ , pak (\*) konverguje pro  $w$  absolutně.

**Důkaz:**  $|a_k(w - z_0)^k| = |a_k(z - z_0)^k| \left| \frac{w - z_0}{z - z_0} \right|^k \leq M \cdot q^k \dots$  geometrická řada

$(0 \leq q < 1$ ; zřejmě  $z \neq z_0$ )

$$\sum_k a_k(z - z_0)^k \text{ konverguje} \Rightarrow \exists M > 0, \forall k \in \mathbb{N} : |a_k(z - z_0)^k| \leq M.$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k(w - z_0)^k \text{ konverguje absolutně.}$$

**Definice:**  $R = \sup\{|z - z_0| : (*) \text{ konverguje v } z\} \in [0, \infty]$  (poloměr konvergence mocninné řady (\*))

$$\mathcal{K}(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$$

**Důsledek:** (\*) konverguje absolutně všude v  $\mathcal{K}(z_0, R)$  a diverguje všude na  $\{z : |z - z_0| > R\}$ .

**Poznámka:** na hranici  $\partial\mathcal{K}(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R\}$  může mocninná řada konvergovat i divergovat.

**Příklad:** 1)  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \dots R = \infty.$

2)  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \dots R = 1.$

**Tvrzení 2.10:** Mocninné řady (\*)  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)$  a (\*)'  $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k(z - z_0)^{k-1}$  mají stejný poloměr konvergence.

**Důkaz:** BÚNO necht'  $z_0 = 0$ .

označme  $R \dots$  poloměr konvergence (\*)

$R' \dots$  poloměr konvergence (\*)'

$R'$  je též poloměr konvergence řady  $\sum_{k=1}^{\infty} ka_k z^k$ .

1)  $R' \leq R$ :  $R' = 0 \dots$  jasné.

nechť  $R' > 0$ , zvolme  $0 < r < R'$

$\sum ka_k z^k$  konverguje absolutně na  $\{z : |z| = r\}$

$\Rightarrow \sum a_k z^k$  konverguje absolutně na  $\{z : |z| = r\}$

$\Rightarrow R \geq r \Rightarrow R \geq R'$ .

2)  $R \leq R'$ . Nechť  $R > 0$  (jinak jasné)

$0 < r < R$ ,  $z \in \mathbb{C}$ ,  $r < |z| < R$

$\sum a_k z^k$  konverguje absolutně v  $z$

$\Rightarrow \exists M > 0, \forall k : |a_k z^k| \leq M$

$|ka_k r^k| = |a_k z^k| k \left(\frac{r}{|z|}\right)^k \Rightarrow \sum k|a_k| r^k$  konverguje

$\Rightarrow R' \geq r, R' \geq R$ .

**Věta 2.11:** Nechť řada  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$  má poloměr konvergence  $R > 0$ .

Pak  $f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} ka_k (z - z_0)^{k-1}$ ,  $z \in \mathcal{K}(z_0, R)$ .

**Důkaz:** BÚNO  $z_0 = 0$ .

označme  $s_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ ,  $R_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k$ .

$f(z) = s_n(z) + R_n(z)$

zvolme  $w \in \mathbb{C}$ ,  $|w| < R$ ,  $r > 0$ ,  $0 < |w| < r < R$

pro  $z \neq w$ ,  $|z| < R$ :

$$\frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w) = \left( \frac{s_n(z) - s_n(w)}{z - w} - s'_n(w) \right) + (s'_n(w) - g(w)) + \frac{R_n(z) - R_n(w)}{z - w}$$

$$g(w) = \sum_{k=1}^{\infty} ka_k w^{k-1}$$

$$\frac{R_n(z) - R_n(w)}{z - w} = \frac{1}{z - w} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k (z^k - w^k) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \frac{z^k - w^k}{z - w};$$

$$\left| \frac{z^k - w^k}{z - w} \right| = |z^{k-1} + z^{k-2}w + z^{k-3}w^2 + \dots + w^{k-1}| \leq kr^{k-1}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{R_n(z) - R_n(w)}{z - w} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| kr^{k-1} < \varepsilon \text{ pro dostatečně velké } n \in \mathbb{N}.$$

$$|s'_n(w) - g(w)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} ka_k w^{k-1} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} k|a_k| r^{k-1} < \varepsilon \text{ pro dostatečně velká}$$

$n$ .

$$\left| \frac{s_n(z) - s_n(w)}{z - w} - s'_n(w) \right| < \varepsilon \text{ pro } |w - z| < \delta \text{ "dostatečně malé"}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w) \right| < 3\varepsilon \text{ pro } |z - w| < \delta$$

$$\Rightarrow f'(w) = g(w).$$

**Důsledek:** Má-li  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$  poloměr konvergence  $R > 0$ , má  $f$  v

$\mathcal{K}(z_0, R)$  derivace všech řádů a platí:  $f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n (z - z_0)^{n-k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

**Důsledek:** Platí  $a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

Tedy koeficienty mocninné řady s kladným poloměrem konvergence jsou jednoznačně určeny.

**Poznámka:**  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ ,  $R > 0$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{(z - z_0)^{k+1}}{k+1}$$

Pak  $F(z)$  má rovněž poloměr konvergence  $R$  a platí  $F' = f$  na  $\mathcal{K}(z_0, R)$ .

**Příklad:**  $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$  ( $R = 1$ ,  $\frac{1}{1+x^2} = (\arctg x)'$ )

$$\Rightarrow \arctg x = a_0 + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$\arctg 0 = 0 \Rightarrow a_0 = 0. (R = 1)$$



### 2.3. Stejněměrná konvergence

**Poznámka:**  $f_n \rightarrow f$  na  $M \Leftrightarrow f_n(x) \rightarrow f(x) \forall x \in M$

**Definice:**  $A \neq \emptyset; f_n, f : A \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$

$f_n \rightrightarrows f$  na  $A \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 \forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ .

Posloupnost funkcí  $(f_n)$  stejnoměrně konverguje k funkci  $f$  na množině  $A$ .

**Poznámky:** 1)  $f_n \rightrightarrows f$  na  $A \Leftrightarrow \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ .

2)  $f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow f_n - f \rightrightarrows 0$ .

3)  $f_n \rightrightarrows f$  na  $A \Rightarrow f_n \rightarrow f$  na  $A$  ( $f_n(x) \rightarrow f(x) \forall x \in A$ ) (Bodová konvergence).

**Příklad:**  $f_n(x) = x^n, x \in [0, 1]$

$$f_n(x) \rightarrow \begin{cases} 0 \dots x < 1 \\ 1 \dots x = 1 \end{cases}$$

$$f_n(x) \rightarrow f, f(x) = \begin{cases} 0 \dots x < 1 \\ 1 \dots x = 1 \end{cases}$$

$\forall n \in \mathbb{N} : \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1 \Rightarrow f_n \not\rightrightarrows f$  na  $[0, 1]$

$\forall q < 1 : f_n \rightrightarrows f$  na  $[0, q]$  neboť:  $\sup_{x \in [0,q]} |f_n(x) - f(x)| = q^n \rightarrow 0$  (ale:  $f_n \not\rightrightarrows f$  na  $[0, 1)$ ).

**Věta 2.12** (BC-podmínka pro stejnoměrnou konvergenci)

Nechť funkce  $f_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) jsou definovány na množině  $A$ . Pak  $f_n \rightrightarrows f$  na  $A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall m, n > n_0 : \sup_{x \in A} |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ . (tzn.  $\exists f, f_n \rightrightarrows f$  na  $A$ )

**Důkaz:**  $\Rightarrow$  snadné

$\Leftarrow \forall x \in A : (\text{B-C}) \Rightarrow \exists f(x), f_n(x) \rightarrow f(x)$ .

$m, n > n_0 : \sup_{x \in A} |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon \Rightarrow \forall n > n_0, \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ ,

**Poznámka** - důležitá:

$(X, d)$  metrický prostor.  $\mathcal{C}(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C}, f \text{ spojitá}\}$

$f \in \mathcal{C}(X) \dots \|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$

?  $\|\cdot\|$  je norma na  $\mathcal{C}(X)$

(1)  $\|f\| \geq 0, \|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$

(2)  $\|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$

(3)  $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$

Platí:  $f_n \rightarrow f$  na  $X \Leftrightarrow \|f_n - f\| \rightarrow 0$

Tedy stejnoměrná konvergence spojitých funkcí je konvergencí v NLP  $\mathcal{C}(X)$ .

( $\mathcal{C}(X)$  nemá konečnou dimenzi pro  $X$  nekonečnou)

**Otázka:**  $f_n \rightarrow f, f_n$  spojitá  $\stackrel{?}{\Rightarrow} f$  spojitá.

NE ...  $x^n \rightarrow$  nespojitá funkce na  $[0, 1]$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \stackrel{?}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = f(x_0)$

**Věta 2.13** (Cauchy):

$f_n$  spojité funkce na metrickém prostoru  $(X, d)$

$f_n \rightrightarrows f$  na  $X \Rightarrow f$  je spojitá.

**Důkaz:** Zvolme  $x_0 \in X$  pevně,  $\varepsilon > 0$ .

Potřebujeme:  $\exists \delta > 0, d(x, x_0) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{< \frac{\varepsilon}{3} - \text{stm.konv.}} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(x_0)|}_{< \frac{\varepsilon}{3} - \text{pro } d(x, x_0) < \delta, \exists \delta > 0, \text{spojitost } f_n} + \underbrace{|f_n(x_0) - f(x_0)|}_{< \frac{\varepsilon}{3} - \text{stm.konv.}} <$$

$\varepsilon. (\exists n_0, \forall n > n_0 : n > n_0 \text{ pevné.})$

**Definice:**  $f_n, f : X \rightarrow \mathbb{C}$

$f_n \rightrightarrows_{\text{loc}} f \Leftrightarrow \forall x \in X \exists$  okolí  $U$  bodu  $x$  takové, že  $f_n \rightrightarrows f$  na  $U$ .

(Lokálně stejnoměrná konvergence)

**Příklad:**  $x^n \not\rightrightarrows 0$  na  $[0, 1)$ .

$x^n \rightrightarrows_{\text{loc}} 0$  na  $[0, 1)$ .

**Poznámka:**  $X$  je kompaktní metrický prostor.

$\Rightarrow [f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow f_n \rightrightarrows_{\text{loc}} f]$ . (Důkaz bude.)

**Definice:**  $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}; \sum_{n=0}^{\infty} f_n$  konverguje stejnoměrně na  $A \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} s_n = f_1 + \dots + f_n \rightrightarrows$  na  $A$ .

Píšeme  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n \rightrightarrows$  na  $A; \sum_{n=0}^{\infty} f_n \rightrightarrows s$  na  $A$ .

**Příklad:**  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, x \in (-1, 1) \dots s_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

$\forall q \in (0, 1) : \sum_{k=0}^{\infty} x^k \rightrightarrows \frac{1}{1-x}$  na  $[-q, q]$  ale ne na  $(-1, 1)$ .

**Tvrzení 2.14** (Weistrassův test)

$f_n \rightrightarrows f$  na  $A \Leftrightarrow \exists (\alpha_n), \alpha_n \rightarrow 0, \forall n : \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n$ .

**Důkaz:** Použijeme větu (bude později): “Z každého otevřeného pokrytí kompaktu lze vybrat konečné podpokrytí.”

Neboli:  $X$  kompaktní,  $X \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha, G_\alpha$  otevřené množiny,  $I \neq \emptyset \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in I$

$I : X \subseteq G_{\alpha_1} \cup \dots \cup G_{\alpha_n}$ .

**Věta 2.15** (Dini):

Nechť  $(f_n)$  je monotónní posloupnost spojitých funkcí na kompaktním metrickém prostoru  $(X, d)$ . Jestliže  $f_n \rightarrow f$  na  $X$  a  $f$  je spojitá funkce, pak  $f_n \rightrightarrows f$  na  $X$ .

**Poznámka:**

$f_1 \leq f_2 \leq \dots f_n \nearrow f$

$f_1 \geq f_2 \geq \dots f_n \searrow f$

**Důkaz:**  $g_n = f_n - f$

$$\begin{cases} f_n \searrow f \dots g_n \geq 0, g_n \searrow 0 \\ f_n \nearrow f \dots g_n \leq 0, g_n \nearrow 0 \text{ (podobně)} \end{cases} \quad \text{Bud' } \varepsilon > 0 \text{ dáno.}$$

$$\forall x \in X \exists n_x \in \mathbb{N} : g_{n_x}(x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall x \in X \exists \text{ okolí } U(x) \forall y \in U(x) : |g_{n_x}(y) - g_{n_x}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow g_{n_x}(y) < \varepsilon \text{ (spojitost } g_{n_x} \text{ v } x)$$

$$X \subseteq \bigcup_{x \in X} U(x) \text{ - otevřené pokrytí}$$

$$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \exists x_1, \dots, x_n \in X : X \subseteq U(x_1) \cup \dots \cup U(x_n).$$

$$n_0 = \max\{n_{x_1}, \dots, n_{x_n}\}$$

$$n > n_0 \Rightarrow \forall y \in X \exists i \leq n, y \in U(x_i) \Rightarrow g_n(y) < g_{n_{x_i}}(y) < \varepsilon$$

$$\sup_{y \in X} |g_n(y)| < \varepsilon \Rightarrow g_n \Rightarrow 0 \text{ na } X.$$

Přednáška 15.11.2010

- $f_n \rightrightarrows f$
- $f_n$  spojitá,  $f_n \rightrightarrows f \Rightarrow f$  spojitá
- $f_n \nearrow f$  ( $f_n \searrow f$ ) na kompaktu  $\Rightarrow f_n \rightrightarrows f$

**Příklad** (obrázek na papíře 1)

$$f_n = g_1 + \dots + g_n$$

$$f_n \nearrow f \ (n \rightarrow \infty) \text{ na } (0, 1]$$

$$f_n \not\rightrightarrows f : \sup |f_n - f| = 1 \not\rightarrow 0.$$

**Věta 2.16** (O majorantní řadě, Weierstrassův test):

Funkce  $f_k$  jsou definovány na množině  $A$ .

Nechť  $\sup_{x \in A} |f_k(x)| \leq \alpha_k, k \in \mathbb{N}$ ;

Nechť  $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k < \infty$ . Pak  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$  konverguje stejnoměrně na  $A$ .

**Poznámka:**  $\sum_k \|f_k\| < \infty \Rightarrow \sum f_k \rightrightarrows$ .

**Důkaz:**  $\varepsilon > 0$  dáno,  $\exists n_0, \forall m > n > n_0 : \sup_{x \in A} \left| \sum_{k=n+1}^m f_k(x) \right| < \varepsilon$ .

$$s_n = f_1 + \dots + f_n$$

$$s_m - s_n = f_{n+1} + \dots + f_m$$

$$\sup_{x \in A} \left| \sum_{k=n+1}^m f_k(x) \right| \leq \sup_{x \in A} \sum_{k=n+1}^m |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^m \sup_{x \in A} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^m \alpha_k < \varepsilon. \text{ (B-}$$

C podmínka pro  $\sum_k \alpha_k < \infty$ .)

**Příklad:**  $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k^2 x)}{k^2}$

$$\left| \frac{\sin(k^2 x)}{k^2} \right| \leq \frac{1}{k^2}$$

$\Rightarrow$  řada konverguje stejnoměrně na  $\mathbb{R}$ .

Věta 2.13  $\Rightarrow g$  je spojitá na  $\mathbb{R}$ .

**Příklad** (obrázek na papíře 2)

$g_n \dots$  "špička" výšky  $\frac{1}{n}$  na intervalu  $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$

$\sum g_n$  konverguje na  $(0, 1]$

$$\sup_x \left| \sum_{k=1}^n g_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) \right| \leq \frac{1}{n+1}$$

$\sum g_k \rightrightarrows$  na  $(0, 1]$

ALE  $\sup |g_k(x)| = \frac{1}{k}$

$$\sum_k \frac{1}{k} = \infty.$$

**Věta 2.17:** Nechť existují  $(\mathbb{R}) \int_a^b f_n$ , nechť  $f_n \rightrightarrows f$  na  $[a, b]$ . Pak  $\exists (\mathbb{R}) \int_a^b f$  a platí

$$(\mathbb{R}) \int_a^b f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (\mathbb{R}) \int_a^b f.$$

**Důkaz:** Označme  $a_n = \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)|$ .

Bud'  $\varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n > n_0 : |a_n| < \varepsilon$ , tedy  $f_n(x) - \varepsilon \leq f(x) \leq f_n(x) + \varepsilon \forall x \in [a, b]$ .

$\mathcal{D}$  ... dělení intervalu  $[a, b]$ .

$$s(f_n, \mathcal{D}) - \varepsilon(b-a) \leq s(f, \mathcal{D}) \leq \begin{cases} s(f_n, \mathcal{D}) + \varepsilon(b-a) \\ \mathcal{S}(f, \mathcal{D}) \leq \mathcal{S}(f_n, \mathcal{D}) + \varepsilon(b-a) \end{cases}$$

$$-\varepsilon(b-a) + \int_{\frac{b}{a}}^{\frac{a}{b}} f_n \leq \int_a^b f \leq \int_a^{\frac{b}{a}} f_n + \varepsilon(b-a)$$

$$\Rightarrow \text{existuje } (\mathcal{R}) \int_a^b f \left( \int_a^b f - \int_a^b f \leq 2\varepsilon(b-a) \right)$$

$$\left( \int_a^b f - \int_a^b f_n \right) < 2\varepsilon(b-a) \text{ pro } n > n_0.$$

**Příklad** (obrázek na papíře 3)  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$  Mocninná řada s poloměrem konvergence  $R$ . Necht'  $0 < r < R$ . Pak  $f(z)$  konverguje stejnoměrně (absolutně) na  $\bar{K}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$ .

**Důkaz:** Bud'  $w \in \mathbb{C}$ ,  $r < |w| < R$ .

$$|z| \leq r \Rightarrow |a_k| |z - z_0|^k \leq \underbrace{|a_k(z - z_0)^k|}_{\text{omez.}} \underbrace{\left( \frac{r}{|w - w_0|} \right)^k}_{< 1} = \alpha_k.$$

$$\sum \alpha_k < \infty.$$

$$f_n \rightarrow f, ? \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\lim_{y \rightarrow x} f_n(y)}_{a_n} = \lim_{y \rightarrow x} \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(y)}_{f(x)}$$

**Věta 2.19** (Moore-Osgood):  $(X, d)$  metrický prostor,  $x_0 \in X$  hromadný bod  $X$  (tzn.  $\{x_0\}$  není otevřená). Bud'  $(f_n)$  posloupnost reálných nebo komplexních funkcí na  $X \setminus \{x_0\}$ . Necht':

- (1)  $f_n \rightrightarrows f$  na  $X \setminus \{x_0\}$
- (2)  $\forall n \in \mathbb{N} \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = a_n \in \mathbb{C}$

Pak existují limity:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

**Důkaz:** Mějme  $\varepsilon > 0$ .

$$\exists n_0, m, n > n_0 \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon \forall x \in X \setminus \{x_0\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |\dots| = |a_m - a_n| < \varepsilon$$

$$\varepsilon \Rightarrow \exists a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n; ? f(x) \rightarrow a, x \rightarrow x_0.$$

$$|f(x) - a| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_n(x) - a_n|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|a_n - a|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon.$$

(pevné  $n \in \mathbb{N}$  dost velké,  $\exists \delta > 0$ ,  $\forall x \in P_\delta(x_0)$  - odůvodnění  $< \frac{\varepsilon}{3}$ ).

**Příklad:**  $X = [x_0, y_0)$

$$X \setminus \{x_0\} = (x_0, y_0)$$

$$f_n \rightrightarrows f \text{ na } (x_0, y_0) \text{ a } \exists a_n = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f_n(x) \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

**Příklad:**

1.  $f_n(x) = \frac{\sin(n^2 x)}{n}$ ;  $f_n \rightrightarrows 0$  na  $\mathbb{R}$   
 $f'_n(x) = n \cos(n^2 x) \not\rightrightarrows$  na  $\mathbb{R}$ .

2.  $g_n(x) = \sin \frac{x}{n^2}$ ;  $g_n \rightarrow 0$ ,  $g_n \not\rightrightarrows$  na  $\mathbb{R}$

$$g'_n(x) = \frac{1}{n^2} \cos \frac{x}{n^2} \rightrightarrows 0 \text{ na } \mathbb{R}$$

$[f_n \rightrightarrows_{\text{loc.}} f \not\Rightarrow f'_n \rightrightarrows_{\text{loc.}} f']$ , “ $\Leftarrow$ ” ano.

**Věta 2.20** (Weierstrass):

$$f_n : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}(\mathbb{R})$$

Nechť existují  $f'_n$  na  $(a, b)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Nechť dále platí:

(i)  $\exists x_0 \in (a, b)$ ,  $(f_n(x_0))_{n=1}^\infty$  konverguje

(ii)  $f'_n \rightrightarrows_{\text{loc.}}$  na  $(a, b)$ .

Pak  $f_n \rightrightarrows_{\text{loc.}}$  na  $(a, b)$  a funkce  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  má derivaci na  $(a, b)$  splňující

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x), \quad x \in (a, b).$$

**Příklad:**  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^2+n}{n^2}$

$$\frac{x^2+n}{n^2} = \frac{x^2}{n^2} + \frac{1}{n} \searrow 0$$

Leibnitz  $\Rightarrow$  řada konverguje  $\forall x \in \mathbb{R}$  neabsolutně!

$$\sup_{|x| \leq K} |s_m(x) - s_n(x)| \leq \sup_{|x| \leq K} |a_{n+1}(x)| \rightarrow 0. \quad (m > n)$$

$\Rightarrow$  řada konverguje lokálně stejnoměrně.

Přednáška 22.11.2010

**Věta 2.19** (Moore-Osgoodova - připomenutí):  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{y \rightarrow x} f_n(y) = \lim_{y \rightarrow x} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(y)$

**Důkaz věty 2.20** (Weierstrass):  $x \neq y \in (a, b)$

(\*)  $\frac{(f_m(y) - f_m(x)) - (f_n(y) - f_n(x))}{y-x} = f'_m(c) - f'_n(c)$  pro nějaké  $c$  mezi  $x$  a  $y$ . (Lagrangeova věta pro  $f_m - f_n$ .)

Zvolme  $[u, v] \subseteq (a, b)$ ,  $x_0, x \in [u, v]$ ,  $x_0 \neq x$ .

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |(f_m(x) - f_n(x)) - (f_m(x_0) - f_n(x_0))| + |f_m(x_0) - f_n(x_0)| \leq \varepsilon > 0 : \leq \underbrace{(\leq v-u)}_{(\leq v-u)} \cdot \underbrace{|f'_m(c) - f'_n(c)|}_{(< \varepsilon \text{ pro } m, n \text{ velké})} + \underbrace{|f_m(x_0) - f_n(x_0)|}_{(< \varepsilon \text{ pro } m, n \text{ velké})} \leq \varepsilon(v-u+1)$$

B-C podmínka  $\Rightarrow f_n \Rightarrow$  na  $[u, v] \Rightarrow f_n \Rightarrow_{\text{loc}}$  na  $(a, b)$ ;  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$

Bud'  $x \in [u, v] \subseteq (a, b)$  pevný

Definujeme  $\Phi_n(y) = \frac{f_n(y) - f_n(x)}{y-x}$ ,  $\Phi(y) = \frac{f(y) - f(x)}{y-x}$ ,  $y \in [c, d] \setminus \{x\}$ .

$\Phi_n \Rightarrow_{\text{loc}}$  na  $[c, d] \setminus \{x\}$  podle (\*). ( $\Phi_n \rightarrow \Phi$ ).

$\forall n \in \mathbb{N} : \lim_{y \rightarrow x} \Phi_n(y) = f'_n(x)$

Moore-Osgood pro  $\Phi_n$  na  $[c, d] \setminus \{x\}$  :

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = \lim_{y \rightarrow x} \Phi(y) = f'(x).$$

**Věta 2.21:**  $f_n \Rightarrow f$  na omezeném intervalu  $(a, b)$  a necht' existují  $(\mathcal{N}) \int_a^b f_n \forall n \in \mathbb{N}$ .

Pak existuje  $(\mathcal{N}) \int_a^b f$  a je roven  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n$ .

**Důkaz:**  $F'_n = f_n$  na  $(a, b)$

$x_0 \in (a, b)$  pevné,  $F_n(x_0) = 0 \forall n$ .

Weierstrassova věta pro  $F_n \Rightarrow F_n \Rightarrow$  na  $(a, b)$

$$F = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n; F' = f.$$

$$(\mathcal{N}) \int_a^b f_n = F_n(b_-) - F_n(a_+)$$

$$\text{Moore-Osgood: } (\mathcal{N}) \int_a^b f_n = F(b_-) - F(a_+)$$

**Příklad:**  $\sum a_n(z - z_0)^n \Rightarrow_{\text{loc}}$  v  $\mathcal{K}(z_0, R)$

? na hranici - př.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$

$$\text{Příklad: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x t^{n-1} dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\log(1-x), x \in (-1, 1).$$

**Věta 2.22** (Abel): Necht'  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  konverguje. Pak pro funkci  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

$$\text{platí: } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

**Důkaz:**  $s_k = b_0 + \dots + b_k$ ,  $b_{-1} = 0$ .

$$\sum_{k=0}^n b_k x^k = \sum_{k=0}^n (s_k - s_{k-1}) x^k = s_n x^n + (1-x) \sum_{k=0}^{n-1} s_k x^k$$

$$n \rightarrow \infty, |x| < 1 : f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n b_k x^k = (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k$$

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{k=0}^{\infty} b_k; \varepsilon > 0; \exists n_0, n > n_0 \Rightarrow |s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$(1-x) \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1, |x| < 1.$$

$$\forall n : \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \sum_{k=0}^n |s_k - s| = 0$$

$$\exists \delta > 0, \forall x \in (1-\delta, 1) : |f(x) - s| = |(1-x) \sum_{k=0}^{\infty} (s_k - s)x^k| \leq$$

$$\leq \underbrace{(1-x) \sum_{k=0}^n |s_k - s| x^k}_{< \frac{\varepsilon}{2} \text{ pro } 1-\delta < x < 1} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} |s_k - s| \frac{x^k}{1-x}}_{< \frac{\varepsilon}{2}, n \text{ dosti velké, pevné}} < \varepsilon.$$

**Důsledek 2.23:** Necht'  $w \neq z_0 \in \mathbb{C}$  a  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(w - z_0)^n$  konverguje.

Pak pro  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  platí:  $\lim_{t \rightarrow 1^-} f(z_0 + t(w - z_0)) = f(w)$ .

**Příklad:**  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \log 2$ .

### 3 Fourierovy řady

$$f(x) \begin{cases} f(x) = \sum a_n(x - x_0)^n \\ f(x) = \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \end{cases}$$

$$f(z) = \sum_n z^n = \sum a_n e^{int} = \sum a_n (\cos nt + i \sin nt)$$

$$|z| = 1 : z = e^{it} = \cos t + i \sin t$$

**Definice:** Trigonometrický polynom:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

$a_k, b_k \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), n \in \mathbb{N}$  nebo  $n = 0$ .

$T_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T$ : zřejmě  $T$  bude  $2\pi$ -periodická.

**Pozorování:**  $f$  je  $p$ -periodická funkce na  $\mathbb{R}$  ( $p > 0$ )  $\Rightarrow$

$$(1) \int_0^p f = \int_a^{a+p} f \forall a \in \mathbb{R}$$

$$(2) \int_0^p f(x+c) dx = \int_0^p f(x) dx \forall c \in \mathbb{R}.$$

**Definice:**  $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$  je po částech spojitá, jestliže existuje konečná množina  $F \subseteq [a, b]$  taková, že  $f$  je spojitá na  $[a, b] \setminus F$  a  $\forall x \in [a, b]$  existuje:

$$(1) f(x_+) = \lim_{y \rightarrow x_+} f(y), (x \neq b) \text{ a}$$

$$(2) f(x_-) = \lim_{y \rightarrow x_-} f(y), (x \neq a)$$



Přednáška 29.11.2010

$$T_n(t) = \sum_{k=0}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

Po částech spojitá funkce - obrázek.

**Tvrzení 3.1:**  $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$  po částech spojitá.

$$\text{Pak } \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin tx \, dx = 0.$$

**Důkaz:** 1)  $f \equiv c$  na  $[a, b]$  (konstantní funkce)

$$|c \cdot \int_a^b \sin tx \, dx| = | -\frac{c}{t} [\cos tx]_a^b | \leq \frac{2|c|}{t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

2)  $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$  spojitá  $\Rightarrow f$  je stejnoměrně spojitá na  $[a, b] \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists$  dělení  $\mathcal{D} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  tak, že  $\forall i \leq n \forall x \in [x_{i-1}, x_i] : |f(x) - f(x_i)| < \varepsilon$ .

$$|\int_a^b f(x) \sin tx \, dx| = |\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} [(f(x) - f(x_i)) \sin tx + f(x_i) \sin tx] \, dx| \leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \underbrace{|f(x) - f(x_i)|}_{< \varepsilon} \underbrace{|\sin tx|}_{< 1} \, dx +$$

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i)| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sin tx \, dx \leq \varepsilon(b-a) + \sum_{i=1}^n |f(x_i)| \frac{2}{t} \stackrel{t > \frac{2}{\varepsilon} \sum_{i=1}^n |f(x_i)|}{\leq} \varepsilon(b-a+1).$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) \sin tx \, dx \rightarrow 0$$

$$\textbf{Tvrzení 3.2: } \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(k\varphi) = \frac{\sin((2n+1)\frac{\varphi}{2})}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}, \varphi \in \mathbb{R}.$$

**Poznámka:** Funkce na pravé straně je definována a spojitá na  $\mathbb{R}$  (cvičení).

**Důkaz:**  $\sin(x+y) - \sin(y-x) = 2 \sin x \cos y$ .

$$2 \sin \frac{\varphi}{2} (\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(k\varphi)) = \sin \frac{\varphi}{2} + \sum_{k=1}^n (\sin((k+\frac{1}{2})\varphi) - \sin((k-\frac{1}{2})\varphi)) = \sin((n+\frac{1}{2})\varphi).$$

**Poznámka:**  $D_n(\varphi) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\varphi}{2 \sin \frac{\varphi}{2}} \dots$  Dirichletovo jádro (Dirichlet kernel).

**Definice:**  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$   $2\pi$ -periodická, po částech spojitá na  $[-\pi, \pi]$ .

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) \, dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) \, dt, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(trigonometrické polynomy)

cíl:  $s_n(x) \xrightarrow{''} f(x)$

**Definice:**  $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$  je po částech hladká, jestliže existuje dělení  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  intervalu  $[a, b]$  takové, že

1)  $f$  je spojitá a existuje  $f'$  na  $(x_{i-1}, x_i) \forall i \leq n$

2) existují vlastní limity  $\lim_{x \rightarrow x_{i-1}^+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_i^-} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_{i-1}^+} f'(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_i^-} f'(x)$ .

**Tvrzení 3.3:**  $f$   $2\pi$ -periodická, po částech hladká na  $[-\pi, \pi]$ . Pak  $s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x+t) + f(x-t)) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

**Důkaz:**  $s_n(x) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi (\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx)) f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi (\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t-x)) f(t) dt = \left| \begin{matrix} t = x+z \\ dt = dz \end{matrix} \right| = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi (\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kz) f(x+z) dz \stackrel{3.2}{=} \frac{1}{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})z}{2 \sin \frac{z}{2}} f(x+z) dz = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x+z) + f(x-z)) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})z}{2 \sin \frac{z}{2}} dz.$

**Důsledek:**  $\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}} dt = 1$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

**Důkaz:**  $f \equiv 1$ ,  $n = 0$ ,  $a_0 = 2$  v T.3.3:  $s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi 2 \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = \frac{a_0}{2} = 1$

$a_n = b_n = 0 \forall n \geq 1$ .

**Věta 3.4:**  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$   $2\pi$ -periodická, po částech hladká na  $[-\pi, \pi]$ .

Pak  $s_n(x) \rightarrow \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

**Důkaz:**  $s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x+t) + f(x-t)) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [(f(x_+) + f(x_-)) + (f(x+t) - f(x_+)) + (f(x-t) - f(x_-))] \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\frac{f(x+t) - f(x_+)}{t} + \frac{f(x-t) - f(x_-)}{t}] \frac{t}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin(n + \frac{1}{2})t dt.$   
 $g(t) = [\frac{f(x+t) - f(x_+)}{t} + \frac{f(x-t) - f(x_-)}{t}] \frac{t}{2 \sin \frac{t}{2}} \dots$  po částech spojitá funkce na  $[0, \pi]$ .  
 $\int_0^\pi g(t) \sin(n + \frac{1}{2})t dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$  (Tvrzení 3.1)

Přednáška 6.12.2010

**Věta 3.4:**  $f$   $2\pi$ -periodická, po částech hladká na  $[-\pi, \pi]$ .

Pak  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{f(x_-) + f(x_+)}{2} \forall x \in \mathbb{R}$ .

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt$$

**Důsledek:** Je-li  $f$   $p$ -periodická a po částech hladká na  $[0, p]$ , pak  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{2\pi}{p} nt + b_n \sin \frac{2\pi}{p} nt) = \frac{f(t_-) + f(t_+)}{2}$ , kde  $a_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \cos \frac{2\pi}{p} nt \, dt$ ,  $b_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \sin \frac{2\pi}{p} nt \, dt$

**Poznámka:**  $f$  sudá  $\Rightarrow b_n = 0 \forall n$

$f$  lichá  $\Rightarrow a_n = 0 \forall n$  (podle věty 3.4)

**Důsledek:** Je-li  $f$  jako ve větě 3.4 a konvergují-li řady  $\sum |a_n|$  a  $\sum |b_n|$ , pak:  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \Rightarrow f(x)$  na  $\mathbb{R}$ .

**Důkaz:**  $\sum_n |a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq \sum_n (|a_n| + |b_n|) < \infty$   
 $\Rightarrow$  stejnoměrná konvergence k  $\frac{f(x_-) + f(x_+)}{2} \Rightarrow \text{cauchy} \Rightarrow g(x) = \frac{f(x_-) + f(x_+)}{2}$  je spojitá na  $\mathbb{R} \Rightarrow g(x) \neq f(x), x \in \mathbb{R}$ .

**Důsledek:** Pokud  $\sum_n n|a_n| < \infty, \sum_n n|b_n| < \infty$ , pak  $[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)]' = \sum_{n=1}^{\infty} (-na_n \sin nx + nb_n \cos nx) \forall x \in \mathbb{R}$ .

**Důkaz:** Weierstrassova věta.

**Příklad 1:**  $f(x) = x, x \in (-\pi, \pi)$

$f$  je lichá  $\Rightarrow a_k = 0 \forall k$ .

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin kt \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin kt \, dt = \begin{pmatrix} u = t, & v' = \sin kt \\ u' = 1, & v = -\frac{\cos kt}{k} \end{pmatrix} = -\frac{2}{\pi} \left( \left[ -\frac{t \cos kt}{k} \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos kt}{k} \, dt \right)$$

$$= \frac{2}{\pi} \left( -\pi \cos k\pi + \left[ \frac{\sin kt}{k} \right]_0^{\pi} \right) = -\frac{2}{\pi} \cos k\pi = \frac{2}{\pi} (-1)^{k-1}$$

$$x = 2 \left( \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right), x \in (-\pi, \pi)$$

$$x = \frac{\pi}{2} : \frac{\pi}{2} = 2 \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots \right)$$

**Příklad 2:**  $f(x) = x^2, x \in [-\pi, \pi]$

$f$  sudá  $\Rightarrow b_k = 0, \forall k$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \, dt = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{t^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$\begin{pmatrix} u = t^2, & v' = \cos kt \\ u' = 2t, & v = \frac{\sin kt}{k} \end{pmatrix}$$

$$k \geq 1 : a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 \cos kt \, dt = \frac{2}{\pi} \left( \left[ t^2 \sin kt \right]_0^{\pi} - 2 \int_0^{\pi} t \sin kt \, dt \right) = \frac{2}{\pi} \left( \pi^2 \sin k\pi - \right.$$

$$\left. 2 \frac{\pi^2}{k} (-1)^{k-1} \right) = \frac{4}{k^2} (-1)^k.$$

$$x^2 = \frac{1}{3} \pi^2 - 4 \left( \cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots \right), x \in [-\pi, \pi]$$

$$x = 0 : 0 = \frac{1}{3} \pi^2 - 4 \left( 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots \right)$$

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{12}$$

$$x = \pi : \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left( -1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{9} - \dots \right)$$

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

## 4 Metrické prostory, část II.

**Opakování:**

$(X, d)$   $d : X \times X \mapsto [0, \infty)$

$(Y, \varrho)$

$f : X \mapsto Y$  je spojitý, jestliže  $\forall x \in X \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x' \in X : d(x, x') < \delta \Rightarrow \varrho(f(x), f(x')) < \varepsilon$ .

$G \subseteq X$  je otevřená, jestliže  $\forall x \in G \exists \varepsilon > 0, U_\varepsilon(x) \subseteq G$ .

$F \subseteq X$  je uzavřená, jestliže  $X \setminus F$  je otevřená.

**Věta:**  $F$  je uzavřená v  $X \Leftrightarrow \forall (x_n) \subseteq F,$

$x_n \rightarrow x \Rightarrow x \in F$

**Věta:**  $f : X \mapsto Y$  je spojitý  $\Leftrightarrow \forall G \subseteq Y$  otevřený,  $f^{-1}(G)$  je otevřený.

$f : X \mapsto Y$  je spojitý  $\Leftrightarrow \forall F \subseteq Y$  uzavřený,  $f^{-1}(F)$  je uzavřený.

**Definice:** Metrický prostor  $(X, d)$  je kompaktní, jestliže z každé posloupnosti v  $X$  lze vybrat konvergentní podposloupnost (například  $[a, b]$ ).

**Věta:**  $K \subseteq X$  kompaktní  $\Rightarrow K$  je omezená a uzavřená.

**Věta:**  $X$  kompaktní,  $F \subseteq X$  uzavřená  $\Rightarrow F$  kompaktní.

**Věta:** Kvádr  $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$  je kompaktní (v  $\mathbb{R}^n$ )

$(x^k) \subseteq \times_{i=1}^n [a_i, b_i], x^k = (x_1^k, \dots, x_n^k) \in \mathbb{R}^n$

$(x^{\sigma_1(k)})$  vybraná,  $x_1^{\sigma_1(k)} \rightarrow x_1 \in [a_1, b_1]$  (Weierstrass)

$(x^{\sigma_2(\sigma_1(k))})$  vybraná,  $x_2^{\sigma_2\sigma_1(k)} \rightarrow x_2 \in [a_2, b_2]$

**Věta:**  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  je kompaktní  $\Leftrightarrow A$  je omezená a uzavřená.

**Věta:** Spojitá funkce nabývá na kompaktu svého minima i maxima.

$\varkappa(f) \subseteq \mathbb{R}$  je kompaktní.

Přednáška 13.12.2010

**Věta 4.1** (základní věta algebry):

V tělese  $\mathbb{C}$  má každý nekonstantní polynom alespoň jeden kořen.

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

$$a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{C}; z \in \mathbb{C}$$

$$a_n \neq 0 \dots p \text{ má stupeň } n.$$

$$z \text{ je kořen } p \dots p(z) = 0$$

**Tvrzení 4.2:**

$p$  polynom v  $\mathbb{C}$ .

Funkce  $f(z) = |p(z)|$  nabývá v  $\mathbb{C}$  svého minima.

**Důkaz:**  $f$  spojitá,  $f \geq 0$

problém:  $\mathbb{C}$  není kompaktní

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = \infty : \forall K > 0 \exists R > 0, |z| > R \Rightarrow f(z) > K.$$

zvolme  $K = |a_0| = f(0) = |p(0)|$

$f$  nabývá na  $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$  svého minima (v bodě  $z_0$ )

$$\min_{z \in \mathbb{C}} f(z) = \min_{|z| \leq R} f(z)$$

protože:  $|z| > R \Rightarrow f(z) > f(0)$

$$? \min_z f(z) = 0 ?$$

**Cvičení:** Předpokládat  $p$  nekonstantní.

**Tvrzení 4.3:**  $p$  nekonstantní polynom v  $\mathbb{C}$ ,  $|p(z_0)| > 0$  pro nějaké  $z_0 \in \mathbb{C}$ .

Pak  $|p|$  nenabývá v  $z_0$  lokálního minima.

**Poznámka:** Neplatí v  $\mathbb{R}$ :  $p(x) = x^2 + 1$

**Poznámka 2:** Z tvrzení 4.2 a 4.3 plyne věta 4.1.

**Důkaz:** Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že  $z_0 = 0$ . (Jinak vezměme

$$\tilde{p}(z) = p(z - z_0)$$

$$p(z) = a_0 + a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \dots + a_n z^n$$

$$a_0 \neq 0; a_k \neq 0. (k = \min\{i \geq 1 : |a_i| > 0\})$$

$$\text{Idea: } |p(z)| = \underbrace{|a_0 + a_k z^k|}_{< |a_0| \text{ pro vhodné } z} + o(|z|^k); |z| \text{ "malé"}.$$

$$\underbrace{|a_0 + a_k z^k|}_{< |a_0| \text{ pro vhodné } z}$$

$$a_0 = \varrho_o e^{i\theta_o} (= \varrho_o (\cos \theta_o + i \sin \theta_o)); \varrho_o > 0$$

$$a_k = \varrho_k e^{i\theta_k}; \varrho_k > 0$$

$$z = r e^{i\varrho}$$

$$a_0 + a_k z^k = \varrho_o e^{i\theta_o} + \varrho_k e^{i\theta_k} r^k e^{ik\varrho} = \varrho_o e^{i\theta_o} + \varrho_k r^k e^{i(\theta_k + k\varrho)} = \varrho_o e^{i\theta_o} - \varrho_k r^k e^{i\theta_o} =$$

$$(\varrho_o - \varrho_k r^k) e^{i\theta_o}$$

$$\theta_k + k\varphi = \pi + \theta_o$$

$$\varphi = \frac{\pi + \theta_o + \theta_k}{k}$$

$$e^{i(\pi + \theta_o)} = e^{i\pi} e^{i\theta_o} = -e^{i\theta_o}$$

$$|p(re^{i\varphi})| \leq |a_0 + a_k(re^{i\varphi})^k| + \sum_{j=k+1}^n |a_j|(re^{i\varphi})^j \leq \rho_0 - \rho_k r^k + \sum_{j=k+1}^n |a_j| r^j < \rho_0 - \frac{\rho_k}{2} r^k \text{ pro } r > 0 \text{ dostatečně malé.}$$

$$|a_{k+1}| r^{k+1} + \dots + |a_n| r^n < \frac{\rho_k}{2} r^k \text{ pro } r \text{ malé}$$

$$\underbrace{|a_{k+1}| r + \dots + |a_n| r^{n-k}}_{\text{spojitá v } r} < \frac{\rho_k}{2}$$

### Pokrývání otevřenými množinami

$(X, d)$  metrický prostor,  $A \subseteq X$

$A \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$ ,  $G_i \subseteq X$  otevřené,  $I \neq \emptyset$  ( $I$  může být i nespočetná!)

- otevřené pokrytí množiny  $A$ .

**Věta 4.4** (topologická charakterizace kompaktnosti):  $A \subseteq X$ ,  $X$  metrický prostor.

Je ekvivalentní:

(i)  $A$  je kompaktní

(ii) pro každé otevřené pokrytí  $A \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$  existuje  $n \in \mathbb{N}$  a indexy  $i_1, \dots, i_n \in I$ ,

$A \subseteq \bigcup_{j=1}^n G_{i_j}$  (konečné podpokrytí)

**Poznámka:**  $A = [a, b] \dots \Leftrightarrow$  (ii) (Borelova pokrývací věta)

**Důkaz:** (i)  $\Rightarrow$  (ii): BÚNO necht'  $A = X$ .

a) Ukážeme, že pro kompaktní prostor  $X$  platí:

(\*)  $\forall r > 0 \exists S \subseteq X$  konečná taková, že  $\bigcup_{a \in S} U_r(a) = X$ .

$S \dots r$ -sít' v  $X$ ,  $U_r(a) = \{x \in X : d(x, a) < r\}$ ,  $d(a_n, a_m) \leq \varepsilon$

((\*)  $\dots$  prekompaktnost)

Necht' (\*) neplatí, tedy pro nějaké  $r > 0$  neexistuje  $r$ -sít' v  $X$ . Sestrojíme indukci posloupnost bodů  $a_n \in X$ ,  $d(a_i, a_n) \geq r \forall i < n$ . Zřejmě žádná vybraná podposloupnost z  $(a_n)$  nekonverguje - spor s kompaktností.

Bud'  $X \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$  otevřené pokrytí  $X$ .

$n \in \mathbb{N} \dots S_n \subseteq X \dots$  konečná  $\frac{1}{n}$ -sít'.

Jestliže  $\exists n \in \mathbb{N}, \forall a \in S_n \exists i(a) \in I, U_{\frac{1}{n}}(a) \subseteq G_{i(a)}$ , pak  $\bigcup_{a \in S_n} G_{i(a)}$  je konečné

podpokrytí  $X$ .

Necht' naopak  $\forall n \in \mathbb{N} \exists a_n \in S_n \forall i \in I : U_{\frac{1}{n}}(a_n) \not\subseteq G_i$ .

$X$  kompaktní  $\Rightarrow$  existuje vybraná podposloupnost  $a_{\sigma(n)} \rightarrow a \in X$ .

$\exists j \in I, a \in G_j$

$G_j$  otevřená  $\Rightarrow \exists r < 0, U_r(a) \subseteq G_j$ .

Vezměme  $n \in \mathbb{N}$  tak velké, aby: (i)  $d(a_{\sigma(n)}, a) < \frac{r}{2}$ ,

(ii)  $\frac{1}{\sigma(n)} < \frac{r}{2}$ .

Pak  $U_{\frac{1}{\sigma(n)}}(a_{\sigma(n)}) \subseteq U_r(a) \subseteq G_j$  - spor.

(ii)  $\Rightarrow$  (i): necht'  $a_n \in X, n \in \mathbb{N}$

Ukážu: (\*\*)  $\exists a \in X \forall r > 0 : \{n \in \mathbb{N} : a_n \in U_r(a)\}$  je nekonečná.

Kdyby ne:  $\forall a \in X \exists r(a) > 0, I(a) = \{n : a_n \in U_{r(a)}(a)\}$  je konečná

$X = \bigcup_{a \in X} U_{r(a)}(a)$

z předpokladu existence konečného podpokrytí:  $X = \bigcup_{i=1}^n U_{r(b_i)}(b_i)$

$I = \bigcup_{i=1}^n I(b_i) \dots$  konečná množina

$n_0 \in \mathbb{N} \setminus I$ ;  $a_{n_0} \in U_{r(b_i)}(b_i)$  pro nějaké  $i \leq n$  - spor.

(\*\*)  $\Rightarrow a$  je hromadným bodem  $\{a_n\}$ .

Přednáška 20.12.2010

**Věta 4.4:**  $X$  je kompaktní metrický prostor  $\Leftrightarrow$  z každého otevřeného pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí.

**Důsledek 4.5:**  $X, Y$  metrické prostory  
 $f : X \mapsto Y$  spojitý. Je-li  $X$  kompaktní, je  $f$  stejnoměrně spojitý.

**Důkaz:**  $f$  spojitý:  $\forall x \in X \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_x > 0 : d(z, x) < \delta_x \Rightarrow \varrho(f(z), f(x)) < \varepsilon$ .

$(X, d), (Y, \varrho)$

$X \subseteq \bigcup_{x \in X} U_{\frac{\delta_x}{2}}(x) \dots$  otevřené pokrytí  $X$   $U_\delta(x) = \{z \in X : d(z, x) < \delta\}$

$\stackrel{v. 4.4}{\Rightarrow}$  existují  $x_1, \dots, x_n \in X, X \subseteq U_{\frac{\delta_1}{2}}(x_1) \cup \dots \cup U_{\frac{\delta_n}{2}}(x_n)$

$\delta_i = \delta_{x_i}$ , vezmeme  $\delta = \min\{\frac{\delta_1}{2}, \dots, \frac{\delta_n}{2}\} > 0$

Buďte  $x, z \in X, d(x, z) < \delta$ , pro nějaké  $i \leq n$  je  $x \in U_{\frac{\delta_i}{2}}(x_i)$ , tedy  $x, z \in U_{\delta_i}(x_i) \Rightarrow \varrho(f(x), f(z)) \leq \varrho(f(x), f(x_i)) + \varrho(f(z), f(x_i)) < 2\varepsilon$ .

**Příklady:**

- 1)  $[a, b]$  je kompaktní
- 2)  $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$  je kompaktní
- 3)  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{a = (a_1, a_2, \dots), a_i \in \mathbb{R}\}$

$$\|a\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2}$$

$$l_2 = \{a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \|a\|_2 < \infty\}$$

$\|\cdot\|_2$  je norma na  $l_2$ .

- $l_2$  je vektorový prostor (nekonečné dimenze)  
 $a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$   
 $r \cdot a = (ra_1, ra_2, \dots)$
- $\|a\|_2 = 0 \Leftrightarrow a = 0 = (0, 0, \dots)$
- $\|ra\|_2 = |r| \cdot \|a\|_2$
- $\|a+b\|_2 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}) \leq \|a\|_2 + \|b\|_2$
- $B = \{a \in l_2 : \|a\|_2 \leq 1\}$  (jednotková koule) - omezená, uzavřená.  
 $B$  není kompaktní:  
 $a^n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$   
z posloupnosti  $(a^n)_{n=1}^{\infty}$  nelze vybrat konvergentní podposloupnost.  
 $a^1 = (1, 0, 0, \dots)$   
 $a^2 = (0, 1, 0, 0, \dots)$   
 $a^3 = (0, 0, 1, 0, \dots)$   
 $m \neq n : \|a^m - a^n\|_2 = \sqrt{2}$   
 $\Rightarrow a^n$  nemůže konvergovat.



$$4) [0, 1]^{\mathbb{N}} = \{(x_1, x_2, \dots) : x_i \in [0, 1] \forall i\}$$

$$x, y \in [0, 1]^{\mathbb{N}} \dots d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i}$$

- součinnová metrika
- Hilbertův kvádr
- zřejmě  $d$  je metrika

Platí:  $x^n \rightarrow x$  v  $[0, 1]^{\mathbb{N}} \Leftrightarrow x_i^n \rightarrow x_i \forall i \in \mathbb{N}$ .

$$x^n \rightarrow x \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i^n - x_i|}{2^i} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow |x_i^n - x_i| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \forall i \in \mathbb{N}.$$

**Tvrzení:**  $[0, 1]^{\mathbb{N}}$  je kompaktní metrický prostor.

**Poznámka:** Kompaktnost se zachovává při kartézském součinu.

**Důkaz:** Mějme posloupnost  $x^n \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$ , chceme vybrat konvergentní podposloupnost.

Z Weierstrassovy věty existuje vybraná podposloupnost:  $x_1^{\sigma_1(n)} \rightarrow x_1 \in [0, 1], n \rightarrow \infty$

$$x_2^{\sigma_2(\sigma_1(n))} \rightarrow x_2 \in [0, 1]$$

⋮

$$x_k^{\sigma_k \sigma_{k-1} \dots \sigma_1(n)} \rightarrow x_k \in [0, 1]$$

⋮

(indukcí)

diagonální výběr:  $\sigma(1) = \sigma_1(1), \sigma(2) = \sigma_2 \sigma_1(2), \dots, \sigma(k) = \sigma_k \sigma_{k-1} \dots \sigma_1(k), \dots$

$$x_i^{\sigma(n)} \rightarrow x_i \forall i \in \mathbb{N}$$

5)  $C[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ spojitá}\}$  - vektorový prostor

$$a) \|f\|_s = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)| \text{ (supremová norma)}$$

( $\|\cdot\|_s$  je norma - cvičení!)

$$B = \{f \in C[a, b] : \|f\|_s \leq 1\}$$

- není kompaktní!

$$f_n(t) = \sin(nt); m \neq n \Rightarrow \|f_m - f_n\|_s = (*)$$

$$(*) = \sup_{t \in [a, b]} |\sin mt - \sin nt| \not\xrightarrow{m, n \rightarrow 0} 0.$$

$$g_n(t) = t^n, t \in [0, 1]$$

Žádná vybraná podposloupnost nekonverguje v  $\|\cdot\|_s$  ke spojitě funkci.

$$b) \|f\|_1 = \int_a^b |f|$$

- norma na  $C[a, b]$

$$(\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f|^2}, \|f\|_p = \sqrt[p]{\int_a^b |f|^p}, p \geq 1)$$

- $f = 0 \Leftrightarrow \|f\|_1 = 0$   
 (plyne z:  $g$  spojitá,  $g \geq 0$ ,  $\int_a^b g = 0 \Rightarrow g \equiv 0$ )
- $\int_a^b |f + g| \leq \int_a^b |f| + \int_a^b |g|$ ;  $f_n(t) = t^n \dots f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} 0$

$B = \{f \in C[a, b] : \|f\|_1 \leq 1\}$  není kompaktní

### Přednáška 3.1.2011

**Definice:**  $(X, d)$  metrický prostor

Posloupnost prvků  $(x_n)$  prvků z  $X$  je cauchyovská, jestliže:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n > n_0 : d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

**Definice:** Řekneme, že metrický prostor  $(X, d)$  je úplný, jestliže každá jeho cauchyovská posloupnost konverguje.

**Příklady:**

- $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n$
- $\mathbb{Q}$  není úplný  
 $q_n \in \mathbb{Q}, q_n \rightarrow \sqrt{2}$   
 $(q_n)$  je cauchyovská, ale  $q_n \not\rightarrow$  v  $\mathbb{Q}$ .
- $(0, 1)$  není úplný:  $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$  je cauchyovská, ale nekonverguje v  $(0, 1)$ .

**Tvrzení 4.6:**  $X$  je úplný metrický prostor,  $A \subseteq X$  uzavřená. Pak  $A$  je úplný metrický prostor.

**Důkaz:**  $x_n \in A, (x_n)$  cauchyovská v  $A \Rightarrow (x_n)$  je cauchyovská v  $X$

$\stackrel{\text{úplnost } X}{\Rightarrow} \exists x \in X, x_n \rightarrow x;$

$A$  uzavřená  $\Rightarrow x \in A \Rightarrow A$  je úplný.

**Tvrzení 4.7:** Každý kompaktní metrický prostor je úplný.

**Důkaz:** buď  $(x_n)$  cauchyovská v  $X$ , nechť  $X$  je kompaktní. Existuje vybraná podposloupnost  $x_{\sigma(n)} \rightarrow x \in X$

Ukažme, že  $x_n \rightarrow x$ :

Buď dáno  $\varepsilon > 0$ .

$$1. \exists n_0, \forall m, n > n_0 : d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

$$2. \exists n_1, \forall n > n_1 : d(x_{\sigma(n)}, x) < \varepsilon$$

$$n > \max\{n_0, n_1\} \Rightarrow d(x_n, x) \leq \underbrace{d(x_n, x_{\sigma(n)})}_{< \varepsilon} + \underbrace{d(x_{\sigma(n)}, x)}_{< \varepsilon} < 2\varepsilon. (\sigma(n) \geq n > n_0)$$

**Příklad:**  $\mathbb{R}$  je úplný, ale není kompaktní.

**Poznámka:** úplnost  $\mathbb{R} \rightsquigarrow$  axiom suprema.

**Příklad:**  $(C[a, b], \|\cdot\|_s) \dots$  spojitá funkce na  $[a, b]$ ,  $\|f\|_s = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$ , úplný metrický prostor.

**Důkaz:**  $(f_n)$  cauchyovská posloupnost v  $C[a, b]$

tedy:  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall m, n > n_0 : \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \stackrel{\text{v. 2.12}}{\Rightarrow} f_n \Rightarrow f$  na  $[a, b]$ .

Podle věty 2.13 je limita  $f$  spojitá na  $[a, b] \Rightarrow f_n \rightarrow f$  v  $C[a, b]$ .

$$(C[a, b], \|\cdot\|_1) \|f\|_1 = \int_a^b |f|$$

není úplný: necht' například  $[a, b] = [-1, 1]$

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 \dots x \in [-1, -\frac{1}{n}] \\ nx \dots x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \\ 1 \dots x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

$$m \leq n \dots \|f_m - f_n\| = \int_{-1}^1 |f_m - f_n| = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |f_m - f_n| \leq \frac{2}{m}. (f_n) \text{ je cauchyovská.}$$

$f_n \not\rightarrow$  v  $(C[-1, 1], \|\cdot\|_1)$

Kdyby  $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f$ : pak  $f(x) = \begin{cases} -1 \dots x \in [-1, 0) \\ 1 \dots x \in (0, 1] \end{cases}$  ...  $f$  nelze spojitě dodefinovat v 0.

**Definice:**  $(X, d)$  metrický prostor,  $f : X \mapsto X$ .

Řekneme, že  $f$  je kontrakce, jestliže:

$$\exists q \in (0, 1) \forall x, y \in X : d(f(x), f(y)) \leq q \cdot d(x, y).$$

**Příklad:**  $f(x) = \frac{x}{2} + 1, f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$$|f(x) - f(y)| = |(\frac{x}{2} + 1) - (\frac{y}{2} + 1)| = |\frac{x-y}{2}| = \frac{1}{2}|x - y|$$

**Poznámka:** (cvičení) Každá kontrakce je stejnoměrně spojitá.

**Poznámka:** Nestačí  $d(f(x), f(y)) < d(x, y) \forall x, y \in X$  !

**Definice:**  $x \in X$  je pevným bodem zobrazení  $f : X \mapsto X$ , jestliže  $f(x) = x$ .

Pro  $f : X \mapsto X$ ; značíme  $f^1(x) = f(x), f^2(x) = f(f(x)), \dots, f^n(x) = f(f^{n-1}(x)), \dots$  iterace zobrazení  $f$ .

**Věta 4.8:** (Banachova věta o pevném bodu)

$X$  úplný metrický prostor,  $f : X \mapsto X$  kontrakce. Pak:

- (i)  $f$  má právě jeden pevný bod  $x_0 \in X$ ;
- (ii)  $\forall x \in X, f^n(x) \rightarrow x_0, n \rightarrow \infty$ .

**Příklad:**  $f(x) = 1 + \frac{x}{2}, X = \mathbb{R}$  (dva obrázky)

**Důkaz:**  $x \in X, n \in \mathbb{N} (n > 1), k \in \mathbb{N}$

$$d(f^{n+1}(x), f^n(x)) \leq q \cdot d(f^n(x), f^{n-1}(x)) \leq q^2 \cdot d(f^{n-1}(x), f^{n-2}(x)) \leq \dots \leq q^n \cdot d(f(x), x)$$

$$d(f^{n+k}(x), f^n(x)) \leq d(f^{n+k}(x), f^{n+k-1}(x)) + \dots + d(f^{n+1}(x), f^n(x)) \leq (q^{n+k-1} + q^{n+k-2} + \dots + q^n) \cdot d(f(x), x) = \frac{q^n - q^{n+k}}{1-q} \cdot d(f(x), x) \leq \frac{q^n}{1-q} \cdot d(f(x), x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow$$

$(f^n(x))_n = 1^\infty$  je cauchyovská v  $X \stackrel{\text{úplnost}}{\Rightarrow} f^n(x) \rightarrow x_0 \in X$ .

Ukážeme, že  $x_0$  je pevný bod  $f$ :

$$x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{n+1}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{f(f^n(x))}_{x_0} \stackrel{f \text{ spojitě}}{=} f(\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)) =$$

$f(x_0)$ .

$x_0$  je jediný pevný bod  $f$ :

Bud'te  $x_0, \tilde{x}_0$  pevné body  $f$ .

$$d(x_0, \tilde{x}_0) = d(f(x_0), f(\tilde{x}_0)) \leq q \cdot d(x_0, \tilde{x}_0)$$

$$q < 1 \Rightarrow d(x_0, \tilde{x}_0) = 0 \Rightarrow x_0 = \tilde{x}_0.$$

Přednáška 10.1.2011

$X$  je úplný metrický prostor  $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$  každá cauchyovská posloupnost konverguje.

**Příklad:**  $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, (C[a, b], \|\cdot\|_s)$

**Banachova věta:**  $X$  úplný metrický prostor,  $f : X \mapsto X$  kontrakce  $\Rightarrow$

(i)  $\exists! x_0 \in X, f(x_0) = x_0$  (pevný bod  $f$ )

(ii)  $\forall x \in X, f^n(x) \rightarrow x_0$

**Příklad:**  $l^2$  je úplný.

$$l^2 = \{(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \|(a_n)\|_2 < \infty\}$$

$$\|(a_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2}$$

**Důkaz:**  $(a^n)$  necht' je cauchyovská posloupnost prvků z  $l^2$ .

$$\forall n \in \mathbb{N} : a^n = (a_1^n, a_2^n, \dots), \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (a_i^n)^2} < \infty$$

Cauchyho podmínka:  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall m, n > n_0 : \|a^m - a^n\|_2 < \varepsilon$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (a_i^m - a_i^n)^2} < \varepsilon$$

?  $a^m \xrightarrow{l^2} a$

1) zřejmě  $\forall i \in \mathbb{N} : (a_i^n)_{n=1}^{\infty}$  je cauchyovská

$$|a_i^m - a_i^n| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (a_i^m - a_i^n)^2}$$

$$\Rightarrow a_i^n \rightarrow a_i \in \mathbb{R} \text{ (úplnost } \mathbb{R}), \text{ označme } a = (a_i)_{i=1}^{\infty}$$

2)  $a \in l^2$ : cauchyovská  $\Rightarrow$  omezenost

$$\exists M > 0, \|a^n\|_2 \leq M \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{limitním přechodem: } \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (a_i^m - a_i^n)^2} \leq \varepsilon \Rightarrow \|a\| \leq \underbrace{\|a^m\|}_{\leq M} + \varepsilon.$$

3)  $a^n \xrightarrow{l^2} a$ :

$$\|a^n - a\|_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (a_i^n - a_i)^2 = \underbrace{\sum_{i=1}^{i_0} (a_i^n - a_i)^2}_{0 \forall i_0 \in \mathbb{N}} + \underbrace{\sum_{i=i_0+1}^{\infty} (a_i^n - a_i)^2}_{\leq \sum_{i>i_0} (a_i^n)^2 + \sum_{i>i_0} a_i^2}$$

$$\left[ \sum_{i>i_0} \underbrace{(a_i^{n_0})^2}_{< \varepsilon} + \underbrace{(a_i^n - a_i^{n_0})^2}_{< \varepsilon \text{ z cauchyho podmínky}} \right]$$

### Aplikace Banachovy věty:

1. Přibližná řešení soustav lineárních rovnic

$$(\star) Ax = b, A \text{ matice } n \times n, x, b \in \mathbb{R}^n$$

$$Ax - x = b - x$$

$$(A - I)x = b - x$$

$$x = (I - A)x + b$$

$$L(x) = (I - A)x + b, L : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$$

afinní

hledáme pevný bod  $L$

? je  $L$  kontrakce ?

$$\exists q < 1 : \|(I - A)x - (I - A)y\| \leq q\|x - y\|$$

$$\|(I - A)u\| \leq q\|u\| \quad \forall u \in \mathbb{R}^n$$

pokud ano:  $z \in \mathbb{R}^n$  libovolný,  $z^0 = z$

$$z^n = (I - A)z^{(n-1)} + b = L(z^{(n-1)})$$

$z^n \rightarrow x \dots$  řešení  $(\star)$ .

2. Existence a jednoznačnost řešení diferenciálních rovnic

$$(\star) : y' = f(x, y), y_0 = y(x_0)$$

$$f : G \mapsto \mathbb{R}, G \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ otevřená}$$

$f$  spojitá,  $(x_0, y_0) \in G$ .

(hledáme funkci  $y = y(x)$ ,  $x \in I$ )

**Příklad:**  $y' = 2y$ ,  $y(0) = -2$

$$\begin{cases} y = 0 \\ \frac{y'}{y} = 2 \rightsquigarrow \int \frac{y'}{y} dx = \int 2 dx & \log |y| = 2x + C \\ |y| = e^{2x+C} = e^C \cdot e^{2x} \\ y = K \cdot e^{2x}, (K \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

$$-2 = K \cdot e^0$$

$$y = -2e^{2x}$$

$$x \in \mathbb{R}$$

**Věta 4.9** (Picardova):

$G \subseteq \mathbb{R}^2$  otevřená,  $f : G \mapsto \mathbb{R}$  spojitá

Nechť existuje  $M > 0$  tak, že  $\forall (x, y), (x, z) \in G : |f(x, y) - f(x, z)| \leq M|y - z|$

Pak  $\forall (x_0, y_0) \in G \exists \delta > 0$  tak, že rovnice  $(\star)$  má na intervalu  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  právě jedno řešení.

**Důkaz:** Bud'  $\delta > 0$  (bude upřesněno)

úloha  $(\star)$  je charakteristická rovnice

$$(\star\star): y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

označme operátor (zobrazení)  $A : C[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \mapsto C[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

$$(Ay)(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

$C[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$  je úplný (se supremovou normou)

$A$  je kontrakce:

$$y, z \in C[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

$$\begin{aligned}
\|Ay - Az\|_s &= \sup_{x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta} \left| \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt - \int_{x_0}^x f(t, z(t)) dt \right| \\
&= \sup_{x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta} \left| \int_{x_0}^x (f(t, y(t)) - f(t, z(t))) dt \right| \\
&\leq \sup_{x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta} \int_{x_0}^x |(f(t, y(t)) - f(t, z(t)))| dt \\
&\leq \sup_{x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta} \int_{x_0}^x M \underbrace{|y(t) - z(t)|}_{\leq \|y - z\|_s} dt \leq \delta M \|y - z\|_s \leq \|y - z\|_s
\end{aligned}$$

$$q = \delta M < 1$$

$$0 < \delta < \frac{1}{M}$$

Použijeme Banachovu větu  $\rightsquigarrow \exists! y \in C[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ ,  $Ay = y \Rightarrow y$  řeší  $(\star\star) \Leftrightarrow y$  řeší  $(\star)$ .

**Příklad:**  $y' = \sqrt{1 - y^2}$

$$\frac{y'}{\sqrt{1 - y^2}} = 1$$

$$\arcsin y = x - C$$

$$y = \sin(x - C), \quad x \in (C - \frac{\pi}{2}, C + \frac{\pi}{2}), \quad C \in \mathbb{R}$$

$y = \pm 1 \dots$  také řešení.