MATEMATICKÁ ANALÝZA III

z přednášek Doc. RNDr. Jana Rataje, CSc.

v zimním semestru akademického roku 2010/2011

zapsal Richard Dobřichovský

DISCLAIMER

Tento text je poskytován "tak jak je" bez jakékoli záruky.

Je možné, a velice pravděpodobné, že se v textu vyskytnou chyby a nedostatky; tyto se budu snažit co nejvíce eliminovat, pokud máte zájem disponovat aktuální verzí, najdete ji vždy na http://porscher.wz.cz/mff/. Je jasné, že bez vaší pomoci chyby odstranit nejde - narazíte-li tedy na nějakou chybu či nesrovnalost, nebojte se mne kontaktovat na dobrichovsky@gmail.com. Pomůžete tak sobě, mně a především ostatním připravujícím-se na zkoušku, ať už teď, nebo v příštích letech.

Tato verze byla vygenerována dne 16.1.2011.

PODĚKOVÁNÍ

Doc. RNDr. Janu Ratajovi, CSc. za přednášky
RNDr. Naděždě Krylové, CSc. za cvičení, poznámky a opravy
Milanu Ježkovi za půjčování sešitu, poznámky a opravy
Robertu Husákovi za poznámky a opravy

Obsah

Přednáška 4.10.2010

1 Vícerozměrný Riemannův integrál

Definice: n-rozměrný iterval (box)
$I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$; $-\infty < a_i < b_i < \infty$; $i = 1, \ldots, n$
objem boxu: $|I| = \prod\limits_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$
Dělení boxu na "podboxy":
$\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \cdots \times \mathcal{D}_n$, kde $\mathcal{D}_i = \{a_i = t_i^0 < t_i^1 < \cdots < t_i^{k_i} = b_i\}$ je dělení $[a_i, b_i]$,
tedy $\mathcal{D} = \{[t_1^{j_1 - 1}, t_1^{j_1}] \times \cdots \times [t_n^{j_n - 1}, t_n^{j_n}] : 1 \leq j_i \leq k_i,\ i = 1, \ldots, n\}$
norma dělení $\mathcal{D} : \upsilon(\mathcal{D}) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \upsilon(\mathcal{D}_i)$
Mějme omezenou funkci $f : I \mapsto \mathbb{R}$ a dělení $\mathcal{D}$.
$s(f, \mathcal{D}) = \sum\limits_{J \in \mathcal{D}} |J| \inf\limits_J f$ nazveme dolním součtem f vzhledem k $\mathcal{D}$
$\mathcal{S}(f, \mathcal{D}) = \sum\limits_{J \in \mathcal{D}} |J| \sup\limits_J f$ nazveme horním součtem f vzhledem k $\mathcal{D}$
$\underline{\int}_I f = \sup\limits_{\mathcal{D}} s(f, \mathcal{D})$ - dolní Riemannův integrál z f
$\overline{\int}_I f = \inf\limits_{\mathcal{D}} \mathcal{S}(f, \mathcal{D})$ - horní Riemannův integrál z f
Jsou-li si rovny, definujeme Riemannův integrál z f:
$\int_I f = \underline{\int}_I f = \overline{\int}_I f$
$\mathcal{R}(I) = \{f : I \mapsto \mathbb{R}$ takové, že existuje $\int_I f\}$
Značení: píše se $\int_I f = \int_I f(x, y)\, dx\, dy$, $I \subseteq \mathbb{R}^2$
Poznámka: Platí analogická tvrzení jako pro jednorozměrný integrál.

Věta 1.1: $f : I \mapsto \mathbb{R}$ omezená
$f \in \mathcal{R}(I) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists \mathcal{D} : \mathcal{S}(f, \mathcal{D}) - s(f, \mathcal{D}) < \varepsilon$.

Věta 1.2: $f : I \mapsto \mathbb{R}$ spojitá $\Rightarrow f \in \mathcal{R}(I)$.

Poznámka k důkazu:

f spojitá $\Rightarrow f$ stejnoměrně spojitá na I. $\mathcal{D}$ dělení, aby $\forall J \in \mathcal{D} : \sup\limits_J f - \inf\limits_J f < \varepsilon$. Dále použijeme větu 1.1.

Definice: X, Y metrické prostory, $f : X \mapsto Y$. f je stejnoměrně spojitá, jestliže $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x, y \in X : d_X(x, y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Věta 1.3: $f : K \mapsto \mathbb{R}$ spojitá, K kompaktní $\Rightarrow f$ je stejnoměrně spojitá.
Připomenutí: každý box je kompaktní.

Definice: $N \subseteq \mathbb{R}^n$ je nulová množina (množina nulové (Lebesgneovy) míry), jestliže $\forall \varepsilon > 0$ existuje posloupnost boxů $I_1, I_2, \dots$ taková, že $N \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} I_i$ a platí $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |I_i| < \varepsilon$.

Poznámky:

1. Každá spočetná množina je nulová.
   $N = \{x_1, x_2, \dots\}$, $x_i \in I_i$, $|I_i| < \frac{\varepsilon}{2^i}$, $\sum\limits_i |I_i| < \varepsilon$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \varepsilon$.
2. žádný box není nulová množina
3. existují nespočetné nulové množiny (příklad bude).

Definice: X, Y metrické prostory, $f : X \mapsto Y$, $\mathcal{D}_f = \{x \in X : f$ není spojitá v $x\}$ (body nespojitosti f).

Věta 1.4 (Lebesgne): $f : I \mapsto \mathbb{R}$ omezená. $I \subseteq \mathbb{R}^n$ box. Pak $f \in \mathcal{R}(I) \Leftrightarrow \mathcal{D}_f$ je nulová množina.

Idea důkazu v případě $n = 1$:
$\Leftarrow$: $\sum\limits_i |I_i| < \varepsilon$

Důsledek: $f, g \in \mathcal{R}(I) \Rightarrow$
a) $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(I)$ (a platí $\int\limits_I (\alpha f + \beta g) = \alpha \int\limits_I f + \beta \int\limits_I g)$, $\mathcal{D}_{\alpha f + \beta g} \subseteq \mathcal{D}_f \cup \mathcal{D}_g$
b) $f \circ g \in \mathcal{R}(I)$
c) $\max\{f, g\} \in \mathcal{R}(I)$

Důsledek: $f \geq 0$, $f \in \mathcal{R}(I), \int\limits_I f = 0 \Rightarrow \{x : f(x) > 0\}$ je nulová množina.

Důkaz: $\{x : f(x) > 0\} \subseteq \mathcal{D}_f$.

Věta 1.5 (Fubini): $I \subseteq \mathbb{R}^m, J \subseteq \mathbb{R}^n$ boxy, $f : I \times J \mapsto \mathbb{R}$ omezená, $f \in \mathcal{R}(I \times J)$. Pak následující tři integrály existují a rovnají se:
$\int\limits_{I \times J} f = \int\limits_I (\int\limits_J f(x, y)\, dy)\, dx = \int\limits_J (\int\limits_I f(x, y)\, dx)\, dy$. $(x \in I, y \in J)$.

Příklad: $\int\limits_{[0,1]^2} (x + 2y)^3\, dx\, dy = \int\limits_0^1 (\int\limits_0^1 (x + 2y)^3\, dy)\, dx = \int\limits_0^1 ([\frac{(x+2y)^4}{8}]_{y=0}^{y=1})\, dx = \int\limits_0^1 \frac{(x+2)^4 - x^4}{8}\, dx = [\frac{(x+2)^5 - x^5}{10}]_{x=0}^{x=1} = \frac{3^5 - 1 - 2^5 + 0}{40} = \frac{243 - 1 - 32}{40} = \frac{21}{4} = \int\limits_0^1 (\int\limits_0^1 (x +$

$2y)^3\,dx)\,dy = \int\limits_0^1 [\frac{(x+2y)^4}{4}]_{x=0}^{x=1}\,dy = \int\limits_0^1 \frac{(1+2y)^4-(2y)^4}{4}\,dy = [\frac{(1+2y)^5-(2y)^5}{10}]_{y=0}^{y=1} = \frac{3^5-2^5-1}{40} = \frac{21}{4}$.

Definice: $E \subseteq \mathbb{R}^n$ omezená, ∂E nulová množina $\Rightarrow \chi_E(x) = \begin{cases} 1 \dots x \in E \\ 0 \dots x \notin E \end{cases}$

(Charakteristická funkce množiny E - platí $\chi_E \in \mathcal{R}(I)$ pro každý box $I \supseteq E$

Objem E: $\operatorname{vol} E = \int\limits_I \chi_E$

Cvičení: $\operatorname{vol} E$ nezávisí na volbě boxu $I \supseteq E$.

Přednáška 11.10.2010

Důkaz věty 1.5: označíme $\varphi(x) = \int\limits_J f(x,y)\,dy$

(1) $\varphi \overset{?}{\in} \mathcal{R}(I)$
(2) $\int\limits_I \varphi \overset{?}{=} \int\limits_{I\times J} f$

Víme: $\forall \varepsilon > 0\, \exists \mathcal{D}$ dělení $I \times J$ takové, že $s(f,\mathcal{D}) > \int\limits_{I\times J} f - \varepsilon$.

$\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$, kde $\begin{cases} \mathcal{D}_1 \text{ dělení } I \\ \mathcal{D}_2 \text{ dělení } J \end{cases}$

$$\int\limits_{I\times J} f - \varepsilon < s(f,\mathcal{D}) = \sum_{K\in\mathcal{D}} |K| \inf_K f = \sum_{A\times B\in\mathcal{D}} |A|\cdot|B| \underbrace{\inf_{x\in A, y\in B} f(x,y)}_{\inf\limits_{x\in A}(\inf\limits_{y\in B} f(x,y))} = \sum_{A\in\mathcal{D}_1}\sum_{B\in\mathcal{D}_2} |A| \inf_{x\in A}(|B| \inf_{y\in B} f(x,y)) \leq$$

$$\sum_{A\in\mathcal{D}_1} |A| \inf_{x\in A} \underbrace{\sum_{B\in\mathcal{D}_2} (|B| \inf_{y\in B} f(x,y))}_{s(f(x,\cdot),\mathcal{D})}$$

$(\sum\limits_{i=1}^{n} \inf\limits_u g_i(u) \leq \inf\limits_u \sum\limits_{i=1}^{n} g_i(u))$

$$= \sum_{A\in D_1} |A| \inf_{x\in A} s(f(x,\cdot),\mathcal{D}_2) \overset{\text{def.}}{\leq} \sum_{A\in\mathcal{D}_1} |A| \inf_{x\in A} \underbrace{\underline{\int_J} (x,y)\,dy}_{!!\varphi_*(x),\ \varphi^*(x) = \overline{\int\limits_J} f(x,y)\,dy} = \sum_{A\in\mathcal{D}_1} |A| \inf_{x\in A} \varphi_*(x)$$

Stejně dostaneme: $\exists \mathcal{D}' = \mathcal{D}_1' \times \mathcal{D}_2'$ dělení $I \times J$ tak, že
$\int\limits_{I\times J} f + \varepsilon > \mathcal{S}(f,\mathcal{D}') \geq \cdots \geq \sum\limits_{A\in\mathcal{D}_1'} |A| \sup\limits_{x\in A} \varphi^*(x)$.
$\int\limits_{I\times J} f - \varepsilon \leq \sum\limits_{A\in\mathcal{D}_1} |A| \inf\limits_{x\in A} \varphi_*(x) \leq \sum\limits_{A\in\mathcal{D}_1} |A| \sup\limits_{x\in A} \varphi^*(x) \leq \int\limits_{I\times J} f + \varepsilon$. $(\forall \varepsilon > 0)$
$\Rightarrow \sup\limits_{\mathcal{D}_1} \sum\limits_{A\in\mathcal{D}_1} |A| \inf\limits_{x\in A} \varphi_*(x) = \inf\limits_{D_1} \sum\limits_{A\in D_1} |A| \sup\limits_{x\in A} \varphi^*(x)$
$\Rightarrow \underline{\int\limits_I} \varphi_* = \overline{\int\limits_I} \varphi^* \Rightarrow \int\limits_I \varphi_* = \int\limits_I \varphi^*$ (existují a rovnají se)
$\varphi_* \leq \varphi^*$
$\Rightarrow \int\limits_I \underbrace{(\varphi^* - \varphi_*)}_{\geq 0} = 0$
$\varphi^*(x) = \varphi_*(x)$ až na nulovou množinu.
Tedy $\varphi(x) = \int\limits_J f(x,y)\,dy$ existuje pro všechna x až na nulovou množinu a platí
$\varphi \in \mathcal{R}(I)$, $\int\limits_I \varphi = \int\limits_{I\times J} f$.

Připomenutí: $\operatorname{vol} E = \int\limits_I \chi_E$, $(E \leq I)$
Existuje, pokud ∂E je nulová množina.
$x \mapsto \chi_E(x) \ldots \mathcal{D}_{\chi_E} = \partial E$
$\partial E = \overline{E} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus E}$

Příklad:
$E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\} \partial E = \{x^2 + y^2 = 1\}$ je nulová množina.

Definice:
$\int\limits_E f = \int\limits_I f \cdot \chi_E$, $E \subseteq I$ omezená - existuje, pokud $\mathcal{D}_f$ a ∂E jsou nulové.

Značení: nechť $E \subseteq I \times J$ omezená, I, J boxy
$x \in I \dots E^{x,\cdot} = \{y \in J : (x,y) \in E\}$ řez množiny E v $x \in I$
$y \in J \dots E^{\cdot,y} = \{x \in I : (x,y) \in E\}$
Projekce: (obrázek 1)
$\pi_1 E = \{x \in I : \exists y \in J, (x,y) \in E\}$
$\pi_2 E = \{y \in J : \exists x \in I, (x,y) \in E\}$.

Důsledek (Fubini): $E \subseteq \mathbb{R}^n$ omezená, ∂E nulová, $f : E \mapsto \mathbb{R}$ omezená. Nechť $\int\limits_E f$ existuje. Pak existují integrály a rovnají se:
$\int\limits_E f = \int\limits_{\pi_1 E} (\int\limits_{E^{x,\cdot}} f(x,y)\,dy)\,dx = \int\limits_{\pi_2 E} (\int\limits_{E^{\cdot,y}} f(x,y)\,dx)\,dy$.

Příklad: Spočtěte plochu trojúhelníku (obrázek 2):

$$\text{plocha}\, T = \begin{cases} \int\limits_0^1 \int\limits_{3-3x}^{3-\frac{3}{2}x} 1\,dy\,dx + \int\limits_1^2 \int\limits_0^{3-\frac{3}{2}x} 1\,dy\,dx = \int\limits_0^1 \frac{3}{2}x\,dx + \int\limits_1^2 (3 - \frac{3}{2}x)\,dx = \frac{3}{4} + 3 - \frac{3}{2}\frac{4-1}{2} = \frac{3}{4} + 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{2} \\ \int\limits_0^3 \int\limits_{1-\frac{y}{3}}^{2-\frac{2}{3}y} dx\,dy = \int\limits_0^3 (1 - \frac{y}{3})\,dy = 3 - \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Ještě k nulovým množinám:
E je nulová $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0\, \exists$ boxy $I_1, I_2, \dots,$ $E \subseteq \bigcup\limits_i I_i : \sum\limits_i |I_i| < \varepsilon$.

Poznámka: $E_1, E_2, \dots$ nulové množiny $\Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$ je nulové.

Důkaz: $\forall i \dots E_i \subseteq I_i^1 \cup I_i^2 \cup I_i^3 \cup \dots$
$\sum\limits_{j=1}^{\infty} |I_i^j| < \frac{\varepsilon}{2^i}$
$(\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1)$
$E = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} I_i^j$
$\sum\limits_{i=1}^{\infty} \sum\limits_{j=1}^{\infty} |I_i^j| < \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon$.

Příklad: Existuje nespočetná nulová množina v $\mathbb{R}^1$.
$[0,1] = E_0 \supseteq E_1 \supseteq E_2 \supseteq \dots$
$E_k \dots$ sjednocení 2^k uzavřených intervalů délky $\frac{1}{3^K}$, $k = 0, 1, 2, \dots$
$E = \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} E_k \dots$ nespočetná nulová.

$E \subseteq E_k = I_k^1 \cup \dots \cup I_k^{2^k}$; $\sum\limits_{j=1}^{2^k} |I_k^j| = 2^k \cdot \frac{1}{3^k} = (\frac{2}{3})^k \to 0$, $k \to \infty$.

$x \in [0,1] \dots$ reprezentace v trojkové soustavě: $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i}$, $x_i \in \{0,1,2\}$, $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$
$x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$, $x_i \neq 1 \forall i$
$\Rightarrow x \in E \Rightarrow E$ je nespočetná.
$E \dots$ Cantorovo diskontinuum.

Přednáška 18.10.2010

Substituce

Připomenutí: $f : \varphi([a,b]) \mapsto \mathbb{R}$
$\int\limits_a^b f \circ \varphi(t)\varphi'(t)\,dt = \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx$

Definice: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ otevřená, neprázdná, $\varphi : U \mapsto \mathbb{R}^n$
φ je **regulární** na U, jestliže:
(a) φ je třídy C^1 (tzn. existují spojité parciální derivace 1. řádu na U.)
(b) φ je prosté na U
(c) $D\varphi(u)$ má hodnost n $\forall u \in U$

Motivační příklad: $I \subseteq \mathbb{R}^n$ box, $L : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ lineární
vol $L(I) = ?$
platí: vol $L(I) = |\det L| \cdot |I|$

$$L = \begin{pmatrix} — & u_1 & — \\ — & u_2 & — \\ & \vdots & \\ — & u_n & — \end{pmatrix}$$

buď $\|v\| = 1, v \perp u_i\ \forall i \leq n-1$
vyjádříme $u_n = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_{n-1}u_{n-1} + \beta v$; $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta \in \mathbb{R}$

$$\det L = \beta \det \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ v \end{pmatrix}$$

Definice: $\varphi : U \mapsto \mathbb{R}^n$ regulární, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ otevřená
$\mathcal{J}\varphi(u) \overset{\text{def.}}{=} \det D\varphi(u) \ldots$ Jakobián zobrazení φ v bodě u. (Zřejmě $\mathcal{J}\varphi(u) \neq 0$.)

Věta 1.8 (o substituci): $A \subseteq \mathbb{R}^n$ omezená, ∂A nulová množina
$\varphi : \operatorname{int} A \mapsto \mathbb{R}^n$ regulární; $f : \varphi(A) \mapsto \mathbb{R}$.
Pak $\int\limits_A (f \circ \varphi)|\mathcal{J}\varphi| = \int\limits_{\varphi(A)} f$, má-li jeden z integrálů smysl.

Příklad 1: polární substituce $\varphi : (r,t) \mapsto (r\cos t, r\sin t)$, $r > 0$, $\varphi \in (0, 2\pi)$
$U = (0,\infty) \times (0, 2\pi)$
$\varphi(U) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \geq 0\}$
L_0 : nulová množina

$$\iint\limits_{\{x^2+y^2\leq 1\}} \frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} r\,dr\,dt = 2\pi \int\limits_0^1 \frac{r\,dr}{\sqrt{1-r^2}} =$$
$$= \left[\begin{matrix} s = 1-r^2 & x = r\cos t \\ ds = -2r\,dr & y = r\sin t \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} \varphi(A) = \{x^2+y^2 \leq 1\} \setminus L_0 \\ A = \{(r,t) : r \leq 1, t \in (0,2\pi)\} \end{matrix}\right] = \pi \int\limits_0^1 \frac{ds}{\sqrt{s}} = \pi[2\sqrt{s}]_0^1 =$$
2π

$$\mathcal{J}\varphi(r,t) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos t, -r\sin t \\ \sin t, r\cos t \end{vmatrix} = r.$$

Příklad 2: sférické souřadnice $\begin{cases} [c|c]x = r\cos u\cos v & r > 0 \\ y = r\sin u\cos v & u \in (0, 2\pi) \\ z = r\sin v & v \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$

$\mathcal{J}\varphi(r,u,v) = \begin{vmatrix} \cos u\cos v & -r\sin u\cos v & -r\cos u\sin v \\ \sin u\cos v & r\cos u\cos v & -r\sin u\sin v \\ \sin v & 0 & r\cos v \end{vmatrix} = \sin v(r^2\sin^2 u\sin v\cos v +$
$r^2\cos^2 u\sin v\cos v) + r\cos v(r\cos^2 u\cos^2 v + r\sin^2 u\cos^2 v) = r^2\sin v\sin v\cos v +$
$r^2\cos v\cos^2 v = r^2\cos v$

$\iiint\limits_{\{x^2+y^2+z^2<1\}} z^2\,dxdydz = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{pi}{2}}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 r^2\sin^2 v r^2\cos v\,drdudv = \int\limits_0^{2\pi} du \cdot \int\limits_0^1 r^4\,dr \cdot \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{pi}{2}} \sin^2 v\cos v\,dv =$
$2\pi\frac{1}{5}\int\limits_{-1}^{1} p^2\,dp = \frac{2\pi}{5}\frac{2}{3} = \frac{4\pi}{15}$
$(\sin v = p,\ \cos v\,dv = dp)$

2 Posloupnosti a řady funkcí

2.1. Komplexní čísla

Definice: $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ldots$ množina komplexních čísel
sčítání a násobení skaláru (jako v $\mathbb{R}^2$)
$z \in \mathbb{C} \ldots z = (x, y)$
$i = (0, 1) \ldots$ imaginární jednotka
$z = x + iy \begin{cases} x = Rez \text{ (reálná část)} \\ y = Imz \text{ (imaginární část} \end{cases}$

Definice: operace násobení na $\mathbb{C}$
$z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2$
$z_1 \cdot z_2 \overset{\text{def.}}{=} (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1);\ i^2 = -1$
• násobení je komutativní a asociativní
• $1 = 1 + i0$ je jednotkovým prvkem vzhledem k násobení
• $\forall z \neq 0,\ z \in \mathbb{C} \exists z^{-1} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}; (z = x + iy)$

Tvrzení 2.1: $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ je komutativní těleso.
Poznámka: Na $\mathbb{C}$ nelze definovat uspořádání, abychom dostali uspořádané těleso rozšiřující $(\mathbb{R}, <)$.
Důkaz sporem: nechť $(\mathbb{C}, <)$ je uspořádené těleso.
$i \neq 0 \begin{cases} i > 0 \Rightarrow i \cdot i > 0 \cdot i \Rightarrow -1 > 0 \ldots \text{spor} \\ i < 0 \Rightarrow i \cdot (-i) < 0 \cdot (-i) \Rightarrow 1 < 0 \ldots \text{spor} \end{cases}$

Definice: $z \in \mathbb{C}, z = x + iy \ldots \overline{z} = x - iy \in \mathbb{C}$ je komplexně sdružené číslo k číslu z.
$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \ldots$ absolutní hodnota komplexního čísla z.

Poznámka: $|z| = \|(x, y)\|$
Tedy pro $|\cdot|$ platí trojúhelníková nerovnost.

$(z_n)\ldots$ posloupnost komplexních čísel, $z \in \mathbb{C}$
$z_n \to z,\ n \to \infty, \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} |z_n - z| \to 0.$
(Totéž jako konvergence v $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$)

Tvrzení 2.2: $[z_n = x_n + iy_n \to x + iy = z] \Leftrightarrow x_n \to x \wedge y_n \to y.$

Důkaz: $\max\{|x_n - x|, |y_n - y|\} \leq |z_n - z| \leq |x_n - x| + |y_n - y|$
(bylo, $\sqrt{\sum a_i^2} \leq \sum |a_i|$)

Připomenutí - Bolzano-Cauchyova podmínka konvergence (věta 3.8 LS '09):
(z_n) konverguje $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists n_0\, \forall m, n > n_0 : |z_m - z_n| < \varepsilon.$

Definice: $z_n \in \mathbb{C} \cdots \sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ konverguje, jestliže $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} z_k \to s \in \mathbb{C}.$

Tvrzení 2.3: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |z_n| < \infty \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ konverguje.
(Důkaz z Bolzano-Cauchyovy podmínky.)

Přednáška 25.10.2010

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n,\ z_n \in \mathbb{C}$
$s_n = z_0 + \cdots + z_n \in \mathbb{C}$
$s_n \to s \in \mathbb{C} \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n = s.$

Věta 2.4 (Dirichletovo a Abelovo Kriterium konvergence řady):
$a_n \in \mathbb{C}, b_n \geq 0, (b_n)$ nerostoucí. Pak $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ konverguje, je-li splněna některá z podmínek:
[Abelovo kriterium:] $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje;
[Dichletovo kriterium:] $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ má omezené částečné součty a $b_n \to 0$.
Poznámka: Leibnitzovo kriterium plyne z Dirichletova: $a_n = (-1)^n$.

Příklad: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ konverguje $(x > 0)$.

Důkaz: $a_n = \sin(nx)$, $b_n = \frac{1}{n}$.
? $\sum a_n$ má omezené částečné součty
$2\sin\alpha \sin\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$
$2\sin\frac{x}{2} \sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx = \sum\limits_{k=1}^{n} (\cos(\frac{1}{2} - k)x - \cos(\frac{1}{2} + k)x) = \cos\frac{x}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})x$
$|\sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx| = |\frac{\cos\frac{x}{2} - \cos(n+\frac{1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}| \leq \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}. (\sin\frac{x}{2} \neq 0).$

Důkaz Dirichletova kriteria
$b_n \geq 0$: Buď dáno $\varepsilon > 0$.
$\exists n_0,\ 0 < b_{n_0} < \varepsilon$
$s_n = a_0 + \cdots + a_n;\ \exists M : |s_n| \leq M < \infty\, \forall n.$
Podle BC kriteria potřebujume dokázat:
$\exists n_1\, \forall n > m > n_1 : |\sum\limits_{k=m+1}^{n} a_k b_k| < \varepsilon.$
$a_{m+1}b_{m+1} + a_{m+2}b_{m+2} + \cdots + a_n b_n =$
$= (s_{m+1} - s_m)b_{m+1} + (s_{m+2} - s_{m+1})b_{m+2} + \cdots + (s_n - s_{n-1})b_n =$
$= s_{m+1}\underbrace{(b_{m+1} - b_{m+2})}_{\geq 0} + s_{m+2}\underbrace{(b_{m+2} - b_{m+3})}_{\geq 0} + \cdots + s_{n-1}\underbrace{(b_{n-1} - b_n)}_{\geq 0} - s_m b_{m+1} +$
$s_n b_n$
$|\sum\limits_{m+1}^{n} a_k b_k| \leq M(b_{m+1} - b_n) + 2Mb_{m+1} \leq 3Mb_{m+1} < 3M\varepsilon$ pro $m > n_0$.

2.2. Funkce komplexní proměnné

$D \subseteq \mathbb{C},\ f : D \mapsto \mathbb{C}$

$f = f_1 + if_2 = \mathcal{R}ef + i\mathcal{I}mf$

značení:
$U_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$

$P_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$
$\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$, spojitost f v z_0 jako v $\mathbb{R}^2$.
Definice: Nechť funkce f je definována na nějakém okolí bodu $z_0 \in \mathbb{C}$. Derivaci f v bodě z_0 definujeme $f'(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ pokud limita existuje (v $\mathbb{C}$).

Poznámka: Nelze derivovat zvlášť reálnou a imaginární část.

Tvrzení 2.5: Existuje-li $f'(z_0) \in \mathbb{C}$, pak je f v bodě z_0 spojitá.

Důkaz: $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) - f(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}(z - z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}($ to je $f'(z_0)) \cdot \lim\limits_{z \to z_0}(z - z_0)($to je $0) = 0$.

Cvičení: $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = 0$, $h(z)$ omezená na $P_\varepsilon(z_0) \Rightarrow \lim\limits_{z \to z_0} g \cdot h(z) = 0$.

Příklad: $(z^n)' = nz^{n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$

Tvrzení 2.6: $f' = 0$ na $\mathbb{C} \Rightarrow f$ je konstantní v $\mathbb{C}$.

Důkaz: $f = f_1 + if_2$, $g(x) = f(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$, $g = g_1 + ig_2$

$g'(x) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{g(x+t)-g(t)}{t} = \lim\limits_{(t,s) \to (0,0)} \frac{f((x,y)+(t,s))-f(x,y)}{t+is} = 0.$
$0 = g'(x) = g_1'(x) + ig_2'(x) \Rightarrow g_1'(x) = g_2'(x) = 0 \Rightarrow g_1, g_2$ jsou konstantní
$\Rightarrow f$ je konstantní na $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$.
vezměme $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$
$g(t) = f((1 - t)a + tb), t \in \mathbb{R}$
$g'(t) = 0 \Rightarrow g$ konstatní $\Rightarrow g(0) = g(1) \Rightarrow f(a) = f(b) \Rightarrow f$ je konstantní.

Věta 2.7 (Cauchy-Riemannovy podmínky existence derivace komplexní funkce)
Nechť $f = f_1 + if_2$ je definována na okolí bodu $z_0 \in \mathbb{C}$; značíme $z = x + iy$.
Pak $f'(z_0)$ existuje právě tehdy, když existují $\frac{\partial f_i}{\partial x}(z_0)$, $\frac{\partial f_i}{\partial y}(z_0)$, $i = 1, 2$ a platí $\frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(z_0)$, $\frac{\partial f_1}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0)$.
$f = f_1 + if_2$
$f(z) = f(x + iy)$
$\frac{\partial f_i}{\partial x}, \frac{\partial f_i}{\partial y}, i = 1, 2$
$\frac{1}{i} = -i$

Pak platí: $f'(z_0) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0)$

Důkaz $\Rightarrow$: $f'(z_0) = \lim\limits_{t \to 0,\, t \in \mathbb{R}} \frac{f(z_0+t)-f(z_0)}{t} = \lim\limits_{t \to 0,\, t \in \mathbb{R}} \frac{f(z_0+it)-f(z_0)}{it} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f_1(x_0+t,y_0)-f_1(x_0,y_0)}{t} + i \lim\limits_{t \to 0} \frac{f_2(x_0+t,y_0)-f_2(x_0,y_0)}{t} = (-i) \lim\limits_{t \to 0} \frac{f_1(x_0,y_0+t)-f_1(x_0,y_0)}{t} + \cancel{i} \lim\limits_{t \to 0} \frac{f_2(x_0,y_0+t)-f_2(x_0,y_0)}{\cancel{i}t}$.

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots, x \in \mathbb{R}$

2.3. Mocninné řady

Definice: $e^z = \exp(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$, $z \in \mathbb{C}$.

Poznámka: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ konverguje absolutně $\forall z \in \mathbb{C}$:

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!}$ konverguje podle podílového kriteria: $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{|z|}{k+1} \to 0$.

Přednáška 1.11.2010

Tvrzení 2.8: $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$, $z, w \in \mathbb{C}$

Důkaz: $z_0 \in \mathbb{C}$ pevné
$(e^z)' = (1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots)' \overset{v.2.11}{=} 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots = e^z$
Označím $g(z) = e^z \cdot e^{z_0 - z}$
$g'(z) = e^z \cdot e^{z_0-z} - e^z \cdot e^{z_0-z} = 0$
$\Rightarrow g =$ konstantní na $\mathbb{C}$
$e^0 = 1$, $g(0) = e^{z_0} \Rightarrow e^{z_0} = e^z \cdot e^{z_0-z}\, \forall z \in \mathbb{C}$
$e^{w+z} = e^z \cdot e^w$. $(z_0 - z = w,\ z_0 = z + w)$.

Důsledek: $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$, $z \in \mathbb{C}$
$e^z \neq 0\, \forall z \in \mathbb{C}$

Mocninná řada: $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \ (*)$
$z_0 \in \mathbb{C} \dots$ střed mozninné řady
$a_k \in \mathbb{C} \dots$ koeficienty

Tvrzení 2.9: Jestliže $(*)$ konverguje pro nějaké $z \in \mathbb{C}$ a $w \in \mathbb{C}$ splňuje $|w - z_0| < |z - z_0|$, pak $(*)$ konverguje pro w absolutně.

Důkaz: $|a_k(w - z_0)^k| = |a_k(z - z_0)^k)||\frac{w-z_0}{z-z_0}|^k \leq M \cdot q^k \dots$ geometrická řada $(0 \leq q < 1$; zřejmě $z \neq z_0)$
$\sum\limits_k a_k(z - z_0)^k$ konverguje $\Rightarrow \exists M > 0, \forall k \in \mathbb{N} : |a_k(z - z_0)^k| \leq M$.
$\Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(w - z_0)^k$ konverguje absolutně.

Definice: $R = \sup\{|z - z_0| : (*) \text{ konverguje v } z\} \in [0, \infty]$ (poloměr konvergence mocninné řady $(*)$
$\mathcal{K}(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$

Důsledek: $(*)$ konverguje absolutně všude v $\mathcal{K}(z_0, R)$ a diverguje všude na $\{z : |z - z_0| > R\}$.

Poznámka: na hranici $\partial\mathcal{K}(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R\}$ může mocninná řada konvergovat i divergovat.

Příklad: 1) $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \dots R = \infty$.
2) $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k \dots R = 1$.

Tvrzení 2.10: Mocninné řady $(*)$ $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)$ a $(*')$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1}$ mají stejný poloměr konvergence.

Důkaz: BÚNO nechť $z_0 = 0$.
označme $R \dots$ poloměr konvergence $(*)$
$R' \dots$ poloměr konvergence $(*')$

R' je též poloměr konvergence řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ka_k z^k$.
1) $R' \leq R:$ $R' = 0\ldots$ jasné.
nechť $R' > 0$, zvolme $0 < r < R'$
$\sum ka_k z^k$ konverguje absolutně na $\{z : |z| = r\}$
$\Rightarrow \sum a_k z^k$ konverguje absolutně na $\{z : |z| = r\}$
$\Rightarrow R \geq r \Rightarrow R \geq R'$.
2) $R \leq R'$. Nechť $R > 0$ (jinak jasné)
$0 < r < R$, $z \in \mathbb{C}$, $r < |z| < R$
$\sum a_k z^k$ konverguje absolutně v z
$\Rightarrow \exists M > 0, \forall k : |a_k z^k| \leq M$
$|ka_k r^k| = |a_k z^k| k (\frac{r}{|z|})^k \Rightarrow \sum k|a_k| r^k$ konverguje
$\Rightarrow R' \geq r$, $R' \geq R$.

Věta 2.11: Nechť řada $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ má poloměr konvergence $R > 0$.
Pak $f'(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} ka_k (z-z_0)^{k-1}$, $z \in \mathcal{K}(z_0, R)$.

Důkaz: BÚNO $z_0 = 0$.
označme $s_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$, $R_n(z) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k$.
$f(z) = s_n(z) + R_n(z)$
zvolme $w \in \mathbb{C}$, $|w| < R, r > 0, 0 < |w| < r < R$
pro $z \neq w, |z| < R:$
$\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - g(w) = (\frac{s_n(z)-s_n(w)}{z-w} - s_n'(w)) + (s_n'(w) - g(w)) + \frac{R_n(z)-R_n(w)}{z-w}$
$g(w) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} ka_k w^{k-1}$
$\frac{R_n(z)-R_n(w)}{z-w} = \frac{1}{z-w} \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k (z^k - w^k) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k \frac{z^k - w^k}{z-w}$;
$|\frac{z^k-w^k}{z-w}| = |z^{k-1} + z^{k-2}w + z^{k-3}w^2 + \cdots + w^{k-1}| \leq kr^{k-1}$
$\Rightarrow |\frac{R_n(z)-R_n(w)}{z-w}| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |a_k| kr^{k-1} < \varepsilon$ pro dostatečně velké $n \in \mathbb{N}$.
$|s_n'(w) - g(w)| = |\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} ka_k w^{k-1}| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} k|a_k| r^{k-1} < \varepsilon$ pro dostatečně velká n.
$|\frac{s_n(z)-s_n(w)}{z-w} - s_n'(w)| < \varepsilon$ pro $|w - z| < \delta$ "dostatečně malé".
$\Rightarrow |\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - g(w)| < 3\varepsilon$ pro $|z - w| < \delta$
$\Rightarrow f'(w) = g(w)$.

Důsledek: Má-li $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ poloměr konvergence $R > 0$, má f v $\mathcal{K}(z_0, R)$ derivace všech řádů a platí: $f^{(k)}(z) = \sum\limits_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1) a_k (z-z_0)^{n-k}$, $k \in \mathbb{N}$.

Důsledek: Platí $a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}, k = 0, 1, 2, \ldots$
Tedy koeficienty mocninné řady s kladným poloměrem konvergence jsou jednoznačně určeny.

Poznámka: $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$, $R > 0$
$F(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \frac{(z-z_0)^{k+1}}{k+1}$
Pak $F(z)$ má rovněž poloměr konvergence R a platí $F' = f$ na $\mathcal{K}(z_0, R)$.

Příklad: $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$ $(R = 1,\ \frac{1}{1+x^2} = (\mathrm{arctg} x)')$
$\Rightarrow \mathrm{arctg} x = a_0 + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$
$\mathrm{arctg} 0 = 0 \Rightarrow a_0 = 0.\,(R = 1)$

Přednáška 8.11.2010

2.3. Stejnoměrná konvergence

Poznámka: $f_n \to f$ na $M \Leftrightarrow f_n(x) \to f(x) \,\forall x \in M$

Definice: $A \neq 0; f_n, f : A \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$
$f_n \rightrightarrows f$ na $A \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \,\exists n_0 \in \mathbb{N} \,\forall n > n_0 \,\forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$
Posloupnost funkcí (f_n) stejnoměrně konverguje k funkci f na množině A.

Poznámky: 1) $f_n \rightrightarrows f$ na $A \Leftrightarrow \sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \to 0, n \to \infty.$
2) $f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow f_n - f \rightrightarrows 0.$
3) $f_n \rightrightarrows f$ na $A \Rightarrow f_n \to f$ na A ($f_n(x) \to f(x) \,\forall x \in A$) (Bodová konvergence).
Příklad: $f_n(x) = x^n, x \in [0, 1]$
$f_n(x) \to \begin{cases} 0 \ldots x < 1 \\ 1 \ldots x = 1 \end{cases}$
$f_n(x) \to f, f(x) = \begin{cases} 0 \ldots x < 1 \\ 1 \ldots x = 1 \end{cases}$
$\forall n \in \mathbb{N} : \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1 \Rightarrow f_n \not\rightrightarrows f$ na $[0, 1]$
$\forall q < 1 : f_n \rightrightarrows f$ na $[0, q]$ neboť: $\sup\limits_{x\in[0,q]} |f_n(x) - f(x)| = q^n \to 0$ (ale: $f_n \not\rightrightarrows f$ na $[0, 1)$).

Věta 2.12 (BC-podmínka pro stejnoměrnou konvergenci)
Nechť funkce f_n ($n \in \mathbb{N}$) jsou definovány na množině A. Pak $f_n \rightrightarrows$ na $A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \,\exists n_0 \,\forall m, n > n_0 : \sup\limits_{x\in A} |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$. (tzn. $\exists f, f_n \rightrightarrows f$ na A)

Důkaz: $\Rightarrow$ snadné
$\Leftarrow$ $\forall x \in A$:(B-C)$\Rightarrow \exists f(x), f_n(x) \to f(x).$
$m, n > n_0 : \sup\limits_{x\in A} |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon \Rightarrow \forall n > n_0, \sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$

Poznámka - důležitá:
(X, d) metrický prostor. $\mathcal{C}(X) = \{f : X \to \mathbb{C}, f \text{ spojitá}\}$
$f \in \mathcal{C}(X) \ldots \|f\| = \sup\limits_{x\in X} |f(x)|$
? $\|\cdot\|$ je norma na $\mathcal{C}(X)$
(1) $\|f\| \geq 0, \|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$
(2) $\|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$
(3) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$
Platí: $f_n \to f$ na $X \Leftrightarrow \|f_n - f\| \to 0$
Tedy stejnoměrná konvergence spojitých funkcí je konvergencí v NLP $\mathcal{C}(X)$. ($\mathcal{C}(X)$ nemá konečnou dimenxi pro X nekonečnou)

Otázka: $f_n \to f, f_n$ spojité $\overset{?}{\Rightarrow} f$ spojitá.
NE ... $x^n \to$ nespojitá funkce na [0,1]
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \overset{?}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$

Věta 2.13 (Cauchy):
f_n spojité funkce na metrickém prostoru (X, d)
$f_n \rightrightarrows f$ na $X \Rightarrow f$ je spojitá.

Důkaz: Zvolme $x_0 \in X$ pevně, $\varepsilon > 0$.
Potřebujeme: $\exists \delta > 0, d(x, x_0) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
$|f(x) - f(x_0)| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}\text{ - stm.konv.}} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(x_0)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}\text{ - pro } d(x,x_0)<\delta, \exists\delta>0\text{, spojitost } f_n} + \underbrace{|f_n(x_0) - f(x_0)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}-\text{stm.konv.}} < \varepsilon$. ($\exists n_0, \forall n > n_0 : n > n_0$ pevné.)

Definice: $f_n, f : X \to \mathbb{C}$
$f_n \rightrightarrows_{\text{loc}} f \Leftrightarrow \forall x \in X\ \exists$ okolí U bodu x takové, že $f_n \rightrightarrows f$ na U.
(Lokálně stejnoměrná konvergence)

Příklad: $x^n \not\rightrightarrows 0$ na $[0, 1)$.
$x^n \rightrightarrows_{\text{loc}} 0$ na $[0, 1)$.

Poznámka: X je kompaktní metrický prostor.
$\Rightarrow [f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow f_n \rightrightarrows_{\text{loc}} f]$. (Důkaz bude.)

Definice: $f_n : A \to \mathbb{C}$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na $A \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} s_n = f_1 + \cdots + f_n \rightrightarrows$ na A.
Píšeme $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na A; $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n \rightrightarrows s$ na A.

Příklad: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$, $x \in (-1, 1) \ldots s_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$
$\forall q \in (0, 1) : \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k \rightrightarrows \frac{1}{1-x}$ na $[-q, q]$ ale ne na $(-1, 1)$.

Tvrzení 2.14 (Weistrassův text)
$f_n \rightrightarrows f$ na $A \Leftrightarrow \exists (\alpha_n), \alpha_n \to 0, \forall n : \sup\limits_{x \in A} |f_n(x) - f(x) \leq \alpha_n$.

Důkaz: Použijeme větu (bude později): "Z každého otevřeného pokrytí kompaktu lze vybrat konečné podpokrytí."
Neboli: X kompakt, $X \subseteq \bigcup\limits_{\alpha \in I} G_\alpha$, G_α otevřené množiny, $I \neq 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$, $\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in I : X \subseteq G_{\alpha_1} \cup \cdots \cup G_{\alpha_n}$.

Věta 2.15 (Dimi):
Nechť (f_n) je <u>monotónní</u> posloupnost <u>spojitých</u> funkcí na <u>kompaktním</u> metrickém prostoru (X, d). Jestliže $f_n \to f$ na X, pak $f_n \rightrightarrows f$ na X.

Poznámka:
$f_1 \leq f_2 \leq \ldots f_n \nearrow f$
$f_1 \geq f_2 \geq \ldots f_n \searrow f$

Důkaz: $g_n = f_n - f$

$\begin{cases} f_n \searrow f \dots g_n \geq 0, g_n \searrow 0 \\ f_n \nearrow f \dots g_n \leq 0, g_n \nearrow 0 \text{ (podobně)} \end{cases}$ Buď $\varepsilon > 0$ dáno.
$\forall x \in X\, \exists n_x \in \mathbb{N} : g_{n_x}(x) < \frac{\varepsilon}{2}$
$\forall x \in X\, \exists$ okolí $U(x)\, \forall y \in U(x) : |g_{n_x}(y) - g_{n_x}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$
$\Rightarrow g_{n_x}(y) < \varepsilon$ (spojitost g_{n_x} v x)
$X \subseteq \bigcup\limits_{x \in X} U(x)$ - otevřené pokrytí
$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$, $\exists x_1, \dots, x_n \in X : X \subseteq U(x_1) \cup \dots \cup U(x_n)$.
$n_0 = \max\{n_{x_1}, \dots, n_{x_n}\}$
$n > n_0 \Rightarrow \forall y \in X\, \exists i \leq n,\ y \in U(x_i) \Rightarrow g_n(y) < g_{n_{x_i}}(y) < \varepsilon$
$\sup\limits_{y \in X} |g_n(y)| < \varepsilon \Rightarrow g_n \rightrightarrows 0$ na X.

Přednáška 15.11.2010

- $f_n \rightrightarrows f$
- f_n spojitá, $f_n \rightrightarrows f \Rightarrow f$ spojitá
- $f_n \nearrow f$ ($f_n \searrow f$) na kompaktu $\Rightarrow f_n \rightrightarrows f$

Příklad (obrázek na papíře 1)
$f_n = g_1 + \cdots + g_n$
$f_n \nearrow f\,(n \to \infty)$ na $(0,1]$
$f_n \not\rightrightarrows f : \sup |f_n - f| = 1 \not\to 0.$

Věta 2.16 (O majorantní řadě, Weierstrassův test):
Funkce f_k jsou definovány na množině A.
Nechť $\sup\limits_{x\in A} |f_k(x)|| \leq \alpha_k$, $k \in \mathbb{N}$;
Nechť $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k < \infty$. Pak $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ konverguje stejnoměrně na A.

Poznámka: $\sum\limits_k \|f_k\| < \infty \Rightarrow \sum f_k \rightrightarrows$.

Důkaz: $\varepsilon > 0$ dáno, $?\exists n_0$, $\forall m > n > n_0 : \sup\limits_{x\in A} |\sum\limits_{k=n+1}^{m} f_k(x)| < \varepsilon$.
$s_n = f_1 + \cdots + f_n$
$s_m - s_n = f_{n+1} + \cdots + f_m$ - patří tyhle řádky sem?
$\sup\limits_{x\in A} |\sum\limits_{k=n+1}^{m} f_k(x)| \leq \sup\limits_{x\in A} \sum\limits_{k=n+1}^{m} |f_k(x)| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{m} \sup\limits_{x\in A} |f_k(x)| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{m} \alpha_k < \varepsilon$. (B-C podmínka pro $\sum\limits_k \alpha_k < \infty$.)

Příklad: $g(x) = \sum\limits_{k-1}^{\infty} \frac{\sin(k^2x)}{k^2}$
$|\frac{\sin(k^2x)}{k^2}| \leq \frac{1}{k^2}$
$\Rightarrow$ řada konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$.
Věta 2.13 $\Rightarrow$ g je spojitá na $\mathbb{R}$.

Příklad (obrázek na papíře 2)
$g_n \ldots$ "špička" výšky $\frac{1}{n}$ na intervalu $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$
$\sum g_n$ konverguje na $(0,1]$
$\sup\limits_x |\sum\limits_{k=1}^{n} g_k(x) - \sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k(x)| \leq \frac{1}{n+1}$
$\sum g_k \rightrightarrows$ na $(0,1]$
ALE $\sup |g_k(x)| = \frac{1}{k}$
$\sum\limits_k \frac{1}{k} = \infty$.

Věta 2.17: Nechť existují (R) $\int\limits_a^b f_n$, nechť $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$. Pak $\exists$(R) $\int\limits_a^b f$ a platí

(R) $\int\limits_a^b f_n \xrightarrow[n\to\infty]{}$ (R) $\int\limits_a^b f$.

Důkaz: Označme $a_n = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|$.
Buď $\varepsilon > 0$, $\exists n_0$, $\forall n > n_0 : |a_n| < \varepsilon$, tedy $f_n(x) - \varepsilon \leq f(x) \leq f_n(x) + \varepsilon\, \forall x \in [a,b]$.

$\mathcal{D} \dots$ dělení intervalu $[a, b]$.

$$s(f_n, \mathcal{D}) - \varepsilon(b-a) \leq s(f, \mathcal{D}) \leq \begin{cases} s(f_n, \mathcal{D}) + \varepsilon(b-a) \\ \mathcal{S}(f, \mathcal{D}) \leq \mathcal{S}(f_n, \mathcal{D}) + \varepsilon(b-a) \end{cases}$$

$$-\varepsilon(b-a) + \underline{\int_b^a} f_n \leq \int_a^b f \leq \overline{\int_a^b} f_n + \varepsilon(b-a)$$

$$\Rightarrow \text{existuje } (\mathcal{R}) \int_a^b f \; (\overline{\int_a^b} ??? - \int_a^b f \leq 2\varepsilon(b-a)$$

$$(\int_a^b f - \int_a^b f_n) < 2\varepsilon(b-a) \text{ pro } n > m_0.$$

Příklad (obrázek na papíře 3) $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ Mocninná řada s poloměrem konvergence R. Nechť $0 < r < R$. Pak $f(z)$ konverguje stejnoměrně (absolutně) na $\overline{K(z_0, r)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$.

Důkaz: Buď $w \in \mathbb{C}$, $r < |w| < R$.

$$|z| \leq r \Rightarrow |a_k| z - z_0|^k| \leq \underbrace{|a_k (w - z_0)^k|}_{\text{omez.}} \underbrace{(\frac{r}{|w - w_0|})^k}_{<1} = \alpha_k.$$

$\sum \alpha_k < \infty$.

$$f_n \to f, ? \underbrace{\lim_{n\to\infty} \lim_{y\to x} f_n(y)}_{a_n} = \lim_{y\to x} \underbrace{\lim_{n\to\infty} f_n(y)}_{f(x)}$$

Věta 2.19 (Moore-Osgood): (X, d) metrický prostor, $x_0 \in X$ hromadný bod X (tzn. $\{x_0\}$ není otevřená). Buď (f_n) posloupnost reálných nebo komplexních funkcí na $X \setminus \{x_0\}$. Nechť:

(1) $f_n \rightrightarrows f$ na $X \setminus \{x_0\}$

(2) $\forall n \in \mathbb{N} \, \exists \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = a_n \in \mathbb{C}$

Pak existují limity: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Důkaz: Mějme $\varepsilon > 0$.

$\exists n_0,\ m, n > n_0 \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon \, \forall x \in X \setminus \{x_0\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} |\dots| = |a_m - a_n| < \varepsilon \Rightarrow \exists a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n;\ ? f(x) \to a,\ x \to x_0$.

$$|f(x) - a| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_n(x) - a_n|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|a_n - a|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon.$$

(pevné $n \in \mathbb{N}$ dost velké, $\exists \delta > 0$, $\forall x \in P_\delta(x_0)$ - odůvodnění $< \frac{\varepsilon}{3}$.

Příklad: $X = [x_0, y_0)$

$X \setminus \{x_0\} = (x_0, y_0)$

$f_n \rightrightarrows f$ na (x_0, y_0) a $\exists \, a_n = \lim\limits_{x\to x_0^+} f_n(x) \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Příklad:

1. $f_n(x) = \frac{\sin(n^2 x)}{n}$; $f_n \rightrightarrows 0$ na $\mathbb{R}$
   $f_n'(x) = n \cos(n^2 x) \not\rightrightarrows$ na $\mathbb{R}$.

2. $g_n(x) = \sin \frac{x}{n^2}$; $g_n \to 0$, $g_n \not\rightrightarrows$ na $\mathbb{R}$

$g_n'(x) = \frac{1}{n^2} \cos \frac{x}{n^2} \rightrightarrows 0$ na $\mathbb{R}$

$[f_n \rightrightarrows_{\text{loc.}} f \not\Rightarrow f_n' \rightrightarrows_{\text{loc.}} f']$, "$\Leftarrow$" ano.

Věta 2.20 (Weierstrass):
$f_n : (a,b) \to \mathbb{C}(\mathbb{R})$
Nechť existují f_n' na (a,b), $n \in \mathbb{N}$.
Nechť dále platí:
(i) $\exists x_0 \in (a,b)$, $(f_n(x_0))_{n=1}^{\infty}$ konverguje
(ii) $f_n' \rightrightarrows_{\text{loc}}$ na (a,b).
Pak $f_n \rightrightarrows_{\text{loc}}$ na (a,b) a funkce $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ má derivaci na (a,b) splňující $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$, $x \in (a,b)$.

Příklad: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^2+n}{n^2}$
$\frac{x^2+n}{n^2} = \frac{x^2}{n^2} + \frac{1}{n} \searrow 0$
Leibnitz $\Rightarrow$ řada konveruje $\forall x \in \mathbb{R}$ neabsolutně!
$\sup\limits_{|x|\le K} |s_m(x) - s_n(x)| \le \sup\limits_{|x|\le K} |a_{n+1}(x)| \to 0$. $(m > n)$
$\Rightarrow$ řada konverguje lokálně stejnoměrně.

Přednáška 22.11.2010

Věta 2.19 (Moore-Osgoodova - připomenutí): $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{y\to x} f_n(y) = \lim\limits_{y\to x}\lim\limits_{n\to\infty} f(y)$

Důkaz věty 2.20 (Weiestrass): $x \neq y \in (a,b)$
$(\star)\frac{(f_m(y)-f_m(x))-(f_n(y)-f_n(x))}{y-x} = f'_m(c) - f'_n(c)$ pro nějaké c mezi x a y. (Lagrangerova věta pro $f_m - f_n$.)
Zvolme $[u,v] \subseteq (a,b)$, $x_0, x \in [u,v]$, $x_0 \neq x$.
$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |(f_m(x) - f_n(x)) - (f_m(x_0) - f_n(x_0))| + |f_m(x_0) - f_n(x_0)| \leq$
$\varepsilon > 0 : \leq^{(\star)} \underbrace{|x - x_0|}_{(\leq v-u)} \cdot \underbrace{|f'_m(c) - f_n(c)|}_{(<\varepsilon \text{ pro } m,n \text{ velké})} + \underbrace{|f_m(x_0) - f_n(x_0)|}_{(<\varepsilon \text{ pro } m,n \text{ velké})} \leq \varepsilon(v - u + 1)$
B-C podmínka $\Rightarrow f_n \rightrightarrows$ na $[u,v] \Rightarrow f_n \rightrightarrows_{\text{loc}}$ na (a,b); $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$
Buď $x \in [u,v] \leq (a,b)$ pevný
Definujeme $\Phi_n(y) = \frac{f_n(y)-f_n(x)}{y-x}$, $\Phi(y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$, $y \in [c,d] \setminus \{x\}$.
$\Phi_n \rightrightarrows_{\text{loc}}$ na $[c,d] \setminus \{x\}$ podle $(\star)$. $(\Phi_n \to \Phi)$.
$\forall n \in \mathbb{N} : \lim\limits_{y\to x} \Phi_n(y) = f'_n(x)$
Moore-Osgood pro Φ_n na $[c,d] \setminus \{x\}$:
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f'_n(x) = \lim\limits_{y\to x} \Phi(y) = f'(x)$.

Věta 2.21: $f_n \rightrightarrows f$ na <u>omezeném</u> intervalu (a,b) a nechť existují $(\mathcal{N})\int\limits_a^b f_n \,\forall n \in \mathbb{N}$.
Pak existuje $(\mathcal{N})\int\limits_a^b f$ a je roven $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n$.

Důkaz: $F'_n = f_n$ na (a,b)
$x_0 \in (a,b)$ pevné, $F_n(x_0) = 0\,\forall n$.
Weierstrassova věta pro $F_n \Rightarrow F_n \rightrightarrows$ na (a,b)
$F = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$; $F' = f$.
$(\mathcal{N})\int\limits_a^b f_n = F_n(b_-) - F_n(a_+)$
Moore-Osgood: $(\mathcal{N})\int\limits_a^b f_n = F(b_-) - F(a_+)$

Příklad: $\sum a_n(z - z_0)^n \rightrightarrows_{\text{loc}}$ v $\mathcal{K}(z_0, R)$
? na hranici - př. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$

Příklad: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^x t^{n-1}\,dt = \int\limits_0^x \frac{dt}{1-t} = -\log(1-x)$, $x \in (-1,1)$.

Věta 2.22 (Abel): Nechť $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ konverguje. Pak pro funkci $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ platí: $\lim\limits_{x\to 1_-} f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Důkaz: $s_k = b_0 + \cdots + b_k$, $b_{-1} = 0$.
$\sum\limits_{k=0}^{n} b_k x^k = \sum\limits_{k=0}^{n}(s_k - s_{k-1})x^k = s_n x^n + (1-x)\sum\limits_{k=0}^{n-1} s_k x^k$
$n \to \infty$, $|x| < 1 : f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n} b_k x^k = (1-x)\sum\limits_{k=0}^{\infty} s_k x^k$

$s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$; $\varepsilon > 0$; $\exists n_0,\ n > n_0 \Rightarrow |s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2}$

$(1-x)\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k = 1,\ |x| < 1.$

$\forall n : \lim\limits_{x\to 1_-} (1-x)\sum\limits_{k=0}^{n} |s_k - s| = 0$

$\exists \delta > 0,\ \forall x \in (1-\delta, 1) : |f(x) - s| = |(1-x)\sum\limits_{k=0}^{\infty}(s_k - s)x^k| \leq$

$$\leq \underbrace{(1-x)\sum_{k=0}^{n}|s_k - s||x^k|}_{<\frac{\varepsilon}{2} \text{ pro } 1-\delta<x<1} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty}|s_k - s|\frac{x^k}{1-x}}_{<\frac{\varepsilon}{2},\, n \text{ dosti velké, pevné}} < \varepsilon.$$

Důsledek 2.23: Nechť $w \neq z_0 \in \mathbb{C}$ a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(w-z_0)^n$ konverguje.

Pak pro $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ platí: $\lim\limits_{t\to 1_-} f(z_0 + t(w - z_0)) = f(w)$.

Příklad: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \log 2$.

3 Fourierovy řady

$$f(x)\begin{cases} f(x) = \sum a_n(x-x_0)^n \\ f(x) = \sum(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\end{cases}$$

$f(z) = \sum\limits_n z^n = \sum a_n e^{int} = \sum a_n(\cos nt + i\sin nt)$

$|z| = 1 : z = e^{it} = \cos t + i \sin t$

Definice: Trigonometrický polynom:

$T_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$

$a_k, b_k \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}$ nebo $n = 0$.

$T_n \xrightarrow[n\to\infty]{} T$: zřejmě T bude 2π-periodická.

Pozorování: f je p-periodická funkce na $\mathbb{R}$ $(p > 0) \Rightarrow$

(1) $\int\limits_0^p f = \int\limits_a^{a+p} f \ \forall a \in \mathbb{R}$

(2) $\int\limits_0^p f(x+c)\,dx = \int\limits_0^p f(x)\,dx \ \forall c \in \mathbb{R}$.

Definice: $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ je po částech spojitá, jestliže existuje konečná množina $F \subseteq [a,b]$ taková, že f je spojitá na $[a,b] \setminus F$ a $\forall x \in [a,b]$ existuje:

(1) $f(x_+) = \lim\limits_{y\to x_+} f(y)$, $(x \neq b)$ a

(2) $f(x_-) = \lim\limits_{y\to x_-} f(y)$, $(x \neq a)$

Přednáška 29.11.2010

$T_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$

Po částech spojitá funkce - obrázek.

Tvrzení 3.1: $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ po částech spojitá.
Pak $\lim\limits_{t\to\infty} \int\limits_a^b f(x) \sin tx\, dx = 0$.

Důkaz: 1) $f \equiv c$ na $[a, b]$ (konstantní funkce)
$|c \cdot \int\limits_a^b \sin tx\, dx| = | - \frac{c}{t} [\cos tx]_a^b| \le \frac{2|c|}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$
2) $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ spojitá $\Rightarrow$ f je stejnoměrně spojitá na $[a, b] \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists$ dělení $\mathcal{D} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ tak, že $\forall i \le n\, \forall x \in [x_{i-1}, x_i] : |f(x) - f(x_i)| < \varepsilon$.
$|\int\limits_a^b f(x) \sin tx\, dx| = |\sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} [(f(x) - f(x_i)) \sin tx + f(x_i) \sin tx]\, dx| \le \sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \underbrace{|f(x) - f(x_i)|}_{<\varepsilon} \underbrace{|\sin tx|}_{<1}\, dx +$

$\sum\limits_{i=1}^{n} |f(x_i)|| \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \sin tx\, dx| \le \varepsilon(b - a) + \sum\limits_{i=1}^{n} |f(x_i)| \frac{2}{t} \overset{t > \frac{2}{\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)|}{\le} \varepsilon(b - a + 1)$.
$\Rightarrow \int\limits_a^b f(x) \sin tx\, dx \to 0$

Tvrzení 3.2: $\frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \cos(k\varphi) = \frac{\sin((2n+1)\frac{\varphi}{2})}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}$, $\varphi \in \mathbb{R}$.

Poznámka: Funkce na pravé straně je definována a spojitá na $\mathbb{R}$ (cvičení).

Důkaz: $\sin(x + y) - \sin(y - x) = 2 \sin x \cos y$.
$2 \sin \frac{\varphi}{2} (\frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \cos(k\varphi)) = \sin \frac{\varphi}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} (\sin((k + \frac{1}{2})\varphi) - \sin((k - \frac{1}{2})\varphi)) = \sin((n + \frac{1}{2})\varphi)$.

Poznámka: $D_n(\varphi) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2}\varphi}{2 \sin \frac{\varphi}{2}} \dots$ Dirichletovo jádro (Dirichlet kernel).

Definice: $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ 2π-periodická, po částech spojitá na $[-\pi, \pi]$.
$a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt)\, dt$, $k = 0, 1, 2, \dots$

$b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt)\, dt$, $k = 1, 2, \dots$

$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, $x \in \mathbb{R}$.
(trigonometrické polynomy)
cíl: $s_n(x)$ "$\to$" $f(x)$

Definice: $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ je po <u>částech hladká</u>, jestliže existuje dělení $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ intervalu $[a, b]$ takové, že
1) f je spojitá a existuje f' na $(x_{i-1}, x_i)\, \forall i \le n$

2) existují vlastní limity $\lim\limits_{x\to x_{i-1}^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_i^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_{i-1}^+} f'(x)$, $\lim\limits_{x\to x_i^-} f'(x)$.

Tvrzení 3.3: f 2π-periodická, po částech hladká na $[-\pi,\pi]$. Pak $s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi (f(x+t)+f(x-t))\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt$, $x\in\mathbb{R}$, $n=0,1,2,\dots$

Důkaz: $s_n(x)\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\frac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}(\cos kt\cos kx+\sin kt\sin kx))f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\frac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\cos k(t-x))f(t)\,dt = \begin{vmatrix} t=x+z \\ dt=dz \end{vmatrix} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\frac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\cos kz)f(x+z)\,dz \overset{3.2}{=} \frac{1}{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})z}{2\sin\frac{z}{2}}f(x+z)\,dz = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi(f(x+z)+f(x-z))\frac{\sin(n+\frac{1}{2})z}{2\sin\frac{z}{2}}\,dz.$

Důsledek: $\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt = 1$, $n=0,1,2,\dots$

Důkaz: $f\equiv 1$, $n=0$, $a_0=2$ v T.3.3: $s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi 2\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt = \frac{a_0}{2} = 1$

$a_n = b_n = 0\,\forall n\geq 1$.

Věta 3.4: $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ 2π-periodická, po částech hladká na $[-\pi,\pi]$.
Pak $s_n(x)\to\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$, $\forall x\in\mathbb{R}\,(n\to\infty)$.

Důkaz: $s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi(f(x+t)+f(x-t))\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi[(f(x_+)+f(x_-)) + (f(x+t)-f(x_+))+(f(x-t)-f(x_-))]\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt = \frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi[\frac{f(x+t)-f(x_+)}{t}+\frac{f(x-t)-f(x_-)}{t}]\frac{\frac{t}{2}}{\sin t2}\sin(n+\frac{1}{2})t\,dt.$
$g(t) = [\frac{f(x+t)-f(x_+)}{t}+\frac{f(x-t)-f(x_-)}{t}]\frac{\frac{t}{2}}{\sin t2}\dots$po částech spojitá funkce na $[0,\pi]$.
$\int\limits_0^\pi g(t)\sin(n+\frac{1}{2})t\,dt \xrightarrow[n\to 0]{} 0$. (Tvrzení 3.1)

Přednáška 6.12.2010

Věta 3.4: f 2π-periodická, po částech hladká na $[-\pi, \pi]$.
Pak $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{f(x_-)+f(x_+)}{2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.
$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\, dt$
$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\, dt$

Důsledek: Je-li f p-periodická a po částech hladká na $[0, p]$, pak $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos \frac{2\pi}{p}nt + b_n \sin \frac{2\pi}{p}nt) = \frac{f(t_-)+f(t_+)}{2}$, kde $a_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\cos\frac{2\pi}{p}nt\, dt$, $b_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\sin\frac{2\pi}{p}nt\, dt$

Poznámka: f sudá $\Rightarrow$ $b_n = 0\, \forall n$
f lichá $\Rightarrow$ $a_n = 0\, \forall n$ (podle věty 3.4)

Důsledek: Je-li f jako ve větě 3.4 a konvergují-li řady $\sum |a_n|$ a $\sum |b_n|$, pak:
$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \rightrightarrows f(x)$ na $\mathbb{R}$.

Důkaz: $\sum_n |a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq \sum(|a_n| + |b_n|) < \infty$
$\Rightarrow$ stejnoměrná konvergence k $\frac{f(x_-)+f(x_+)}{2}$ $\Rightarrow^{\text{cauchy}}$ $\Rightarrow$ $g(x) = \frac{f(x_-)+f(x_+)}{2}$ je spojitá na $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $g(x) \neq f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Důsledek: Pokud $\sum_n n|a_n| < \infty$, $\sum_n n|b_n| < \infty$, pak $[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)]' = \sum_{n=1}^{\infty}(-na_n \sin nx + nb_n \cos nx)\, \forall x \in \mathbb{R}$.

Důkaz: Weierstrassova věta.

Příklad 1: $f(x) = x$, $x \in (-\pi, \pi)$
f je lichá $\Rightarrow a_k = 0\, \forall k$.
$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t \sin kt\, dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin kt\, dt = \begin{pmatrix} u = t, & v' = \sin kt \\ u' = 1, & v = -\frac{\cos kt}{k} \end{pmatrix} = -\frac{2}{\pi}([-\frac{t\cos kt}{k}]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos kt}{k}\, dt) = \frac{2}{\pi k}(-\pi\cos k\pi + [\frac{\sin kt}{k}]_0^{\pi}) = -\frac{2}{k}\cos k\pi = \frac{2}{k}(-1)^{k-1}$
$x = 2(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots)$, $x \in (-\pi, \pi)$
$x = \frac{\pi}{2} : \frac{\pi}{2} = 2(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots)$

Příklad 2: $f(x) = x^2$, $x \in [-\pi, \pi]$
f sudá $\Rightarrow b_k = 0$, $\forall k$
$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\, dt = \frac{1}{\pi}[\frac{t^3}{3}]^p i_{-\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$
$\begin{pmatrix} u = t^2, & v' = \cos kt \\ u' = 2t, & v = \frac{\sin kt}{k} \end{pmatrix}$
$k \geq 1 : a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2 \cos kt\, dt = \frac{2}{kt}([t^2 \sin kt]_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} t\sin kt\, dt) = \frac{2}{k\pi}(\pi^2 \sin k\pi - 2\frac{\pi}{2}\frac{2}{k}(-1)^{k-1}) = \frac{4}{k^2}(-1)^k$.
$x^2 = \frac{1}{3}\pi^2 - 4(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots)$, $x \in [-\pi, \pi]$
$x = 0 : 0 = \frac{1}{3}\pi^2 - 4(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots)$
$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{12}$
$x = \pi : \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4(-1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{9} - \dots)$
$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$

4 Metrické prostory, část II.

Opakování:
$(X, d)\, d : X \times X \mapsto [0, \infty)$
(Y, ϱ)
$f : X \mapsto Y$ je spojité, jestliže $\forall x \in X\, \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x' \in X : d(x, x') < \delta \Rightarrow \varrho(f(x), f(x')) < \varepsilon$.
$G \subseteq X$ je otervřená, jestliže $\forall x \in G\, \exists \varepsilon > 0$, $U_\varepsilon(x) \subseteq G$.
$F \subseteq X$ je uzavřená, jestliže $X \setminus F$ je otevřená.

Věta: F je uzavřená v $X \Leftrightarrow \forall (x_n) \subseteq F$,
$x_n \to x \Rightarrow x \in F$

Věta: $f : X \mapsto Y$ je spojité $\Leftrightarrow \forall G \subseteq Y$ otevřené, $f^{-1}(G)$ je otevřená.
$f : X \mapsto Y$ je spojité $\Leftrightarrow \forall F \subseteq Y$ uzavřené, $f^{-1}(F)$ je uzavřená.

Definice: Metrický prostor (X, d) je kompaktní, jestliže z každé posloupnosti v X lze vybrat konvergentní podposloupnost (například $[a, b]$).

Věta: $K \subseteq X$ kompaktní $\Rightarrow K$ je omezená a uzavřená.

Věta: X kompaktní, $F \subseteq X$ uzavřená $\Rightarrow F$ kompaktní.

Věta: Kvádr $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ je kompaktní (v $\mathbb{R}^n$)
$(x^k) \subseteq \times_{i=1}^n [a_i, b_i]$, $x^k = (x_1^k, \ldots, x_n^k) \in \mathbb{R}^n$
$(x^{\sigma_1(k)})$ vybraná, $x_1^{\sigma_1(k)} \to x_1 \in [a_1, b_1]$ (Weierstrass)
$(x^{\sigma_2(\sigma_1(k))}$ vybraná, $x_2^{\sigma_2 \sigma_1(k)} \to x_2 \in [a_2, b_2]$

Věta: $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktní $\Leftrightarrow$ A je omezená a uzavřená.

Věta: Spojitá funkce nabývá na kompaktu svého minima i maxima.
$\varkappa(f) \subseteq \mathbb{R}$ je kompaktní.

Přednáška 13.12.2010

Věta 4.1 (základní věta algebry):
V tělese $\mathbb{C}$ má každý nekonstantní polynom alespoň jeden kořen.

$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$
$a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$; $z \in \mathbb{C}$
$a_n \neq 0 \ldots p$ má stupeň n.
z je kořen $p \ldots p(z) = 0$

Tvrzení 4.2:
p polynom v $\mathbb{C}$.
Funkce $f(z) = |p(z)|$ nabývá v $\mathbb{C}$ svého minima.

Důkaz: f spojitá, $f \geq 0$
problém: $\mathbb{C}$ není kompaktní
$\lim\limits_{|z| \to \infty} f(z) = \infty : \forall K > 0\, \exists R > 0,\ |z| > R \Rightarrow f(z) > K.$
zvolme $K = |a_0| = f(0) = |p(0)|$
f nabývá na $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \mathbb{R}\}$ svého minima (v bodě z_0)
$\min\limits_{z \in \mathbb{C}} f(z) = \min\limits_{|z| \leq R} f(z)$
protože: $|z| > R \Rightarrow f(z) > f(0)$

? $\min\limits_{z} f(z) = 0$?

Cvičení: Předpokládat p nekonstantní.

Tvrzení 4.3: p nekonstantní polynom v $\mathbb{C}$, $|p(z_0)| > 0$ pro nějaké $z_0 \in \mathbb{C}$.
Pak $|p|$ nenabývá v z_0 lokálního minima.

Poznámka: Neplatí v $\mathbb{R}$: $p(x) = x^2 + 1$

Poznámka 2: Z tvrzení 4.2 a 4.3 plyne věta 4.1.

Důkaz: Bez újmy na obeznosti předpokládejme, že $z_0 = 0$. (Jinak vezměme $\tilde{p}(z) = p(z - z_0)$)
$p(z) = a_0 + a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \cdots + a_n z^n$
$a_0 \neq 0$; $a_k \neq 0$. ($k = \min\{i \geq 1 : |a_i| > 0\}$)
Idea: $|p(z)| = \underbrace{|a_0 + a_k z^k|}_{<|a_0| \text{ pro vhodné z}} + o(|z|^k)$; $|z|$ "malé".
$a_0 = \varrho_o e^{i\theta_o}$ $(= \varrho_o(\cos\theta_o + i \sin\theta_o))$; $\varrho_o > 0$
$a_k = \varrho_k e^{i\theta_k}$; $\varrho_k > 0$
$z = re^{i\varrho}$
$a_0 + a_k z^k = \varrho_o e^{i\theta_o} + \varrho_k e^{i\theta_k} r^k e^{ik\varrho} = \varrho_o e^{i\theta_o} + \varrho_k r^k e^{i(\theta_k + k\varrho)} = \varrho_o e^{i\theta_o} - \varrho_k r^k e^{i\theta_o} = (\varrho_o - \varrho_k r^k) e^{i\theta_o}$
$\theta_k + k\varphi = \pi + \theta_o$
$\varphi = \frac{\pi + \theta_o + \theta_k}{k}$
$e^{i(\pi + \theta_o)} = e^{i\pi} e^{i\theta_o} = -e^{i\theta_o}$

$|p(re^{i\varphi})| \leq |a_0 + a_k(re^{i\varphi})^k| + \sum\limits_{j=k+1}^{n} |a_j||(re^{i\varphi})^j| \leq \rho_0 - \rho_k r^k + \sum\limits_{j=k+1}^{n} |a_j| r^j <$
$\rho_0 - \frac{\rho_k}{2} r^k$ pro $r > 0$ dostatečně malé.
$|a_{k+1}| r^{k+1} + \cdots + |a_n| r^n < \frac{\varrho_k}{2} r^k$ pro r malé
$\underbrace{|a_{k+1}| r + \cdots + |a_n| r^{n-k}}_{\text{spojitá v } r} < \frac{\varrho_k}{2}$

Pokrývání otevřenými množinami

(X, d) metrický prostor, $A \subseteq X$
$A \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} G_i$, $G_i \subseteq X$ otevřené, $I \neq \emptyset$ (I může být i nespočetná!)
- otevřené pokrytí množiny A.
Věta 4.4 (topologická charakterizace kompaktnosti): $A \subseteq X$, X metrický prostor.
Je ekvivalentní:
(i) A je kompaktní
(ii) pro každé otevřené pokrytí $A \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} G_i$ existuje $n \in \mathbb{N}$ a indexy $i_1, \ldots, i_n \in I$, $A \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{n} G_{i_j}$ (konečné podpokrytí)
Poznámka: $A = [a, b] \ldots$ i$\Rightarrow$ii (Borelova pokrývací věta)

Důkaz: (i)$\Rightarrow$(ii): BÚNO nechť $A = X$.
a) Ukážeme, že pro kompaktní prostor X platí:
$(*) \forall r > 0 \, \exists S \subseteq X$ konečná taková, že $\bigcup\limits_{a \in S} U_r(a) = X$.
$S \ldots r$-síť v X, $U_r(a) = \{x \in X : d(x, a) < r\}$, $d(a_n, a_m) \leq \varepsilon$
$((*) \ldots$ prekompaktnost)
Nechť $(*)$ neplatí, tedy pro nějaké $r > 0$ neexistuje r-síť v X. Sestrojíme indukcí posloupnost bodů $a_n \in X$, $d(a_i, a_n) \geq r \, \forall i < n$. Zřejmě žádná vybraná podposloupnost z (a_n) nekonverguje - spor s kompaktností.
Buď $X \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} G_i$ otevřené pokrytí X.
$n \in \mathbb{N} \ldots S_n \subseteq X \ldots$ konečná $\frac{1}{n}$-síť.
Jestliže $\exists n \in \mathbb{N}$, $\forall a \in S_n \, \exists i(a) \in I$, $U_{\frac{1}{n}}(a) \subseteq G_{i(a)}$, pak $\bigcup\limits_{a \in S_n} G_{i(a)}$ je konečné podpokrytí X.
Nechť naopak $\forall n \in \mathbb{N} \, \exists a_n \in S_n \, \forall i \in I : U_{\frac{1}{n}}(a_n) \nsubseteq G_i$.
X kompaktní $\Rightarrow$ existuje vybraná podposloupnost $a_{\sigma(n)} \to a \in X$.
$\exists j \in I$, $a \in G_j$
G_j otevřená $\Rightarrow \exists r < 0$, $U_r(a) \subseteq G_j$.
Vezměme $n \in \mathbb{N}$ tak velké, aby: (i) $d(a_{\sigma(n)}, a) < \frac{r}{2}$,
(ii) $\frac{1}{\sigma(n)} < \frac{r}{2}$.
Pak $U_{\frac{1}{\sigma(n)}}(a_{\sigma(n)}) \subseteq U_r(a) \subseteq G_j$ - spor.
(ii)$\Rightarrow$(i): nechť $a_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$
Ukážu: $(**) \, \exists a \in X \, \forall r > 0 : \{n \in \mathbb{N} : a_n \in U_r(a)\}$ je nekonečná.
Kdyby ne: $\forall a \in X \, \exists r(a) > 0$, $I(a) = \{n : a_n \in U_{r(a)}(a)\}$ je konečná
$X = \bigcup\limits_{a \in X} U_{r(a)}(a)$

z předpokladu existence konečného podpokrytí: $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{r(b_i)}(b_i)$

$I = \bigcup_{i=1}^{n} I(b_i) \ldots$ konečná množina

$n_0 \in \mathbb{N} \setminus I$; $a_{n_0} \in U_{r(b_i)}(b_i)$ pro nějaké $i \leq n$ - spor.

$(**) \Rightarrow a$ je hromadným bodem $\{a_n\}$.

Přednáška 20.12.2010

Věta 4.4: X je kompaktní metrický prostor $\Leftrightarrow$ z každého otevřeného pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí.

Důsledek 4.5: X, Y metrické prostory
$f : X \mapsto Y$ spojité. Je-li X kompaktní, je f stejnoměrně spojité.

Důkaz: f spojité: $\forall x \in X \, \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta_x > 0 : d(z, x) < \delta_x \Rightarrow \varrho(f(z), f(x)) > \varepsilon$.
$(X, d), (Y, \varrho)$
$X \subseteq \bigcup\limits_{x \in X} U_{\frac{\delta_x}{2}}(x) \ldots$ otevřené pokrytí X $U_\delta(x) = \{z \in X : d(z, x) < \delta\}$
$\overset{\text{v. } 4.4}{\Rightarrow}$ existují $x_1, \ldots, x_n \in X$, $X \subseteq U_{\delta_{\frac{1}{2}}}(x_1) \cup \cdots \cup U_{\delta_{\frac{n}{2}}}(x_n)$
$\delta_i = \delta_{x_i}$, vezmeme $\delta = \min\{\frac{\delta_1}{2}, \ldots, \frac{\delta_n}{2}\} > 0$
Buďte $x, z \in X$, $d(x, z) < \delta$, pro nějaké $i \leq n$ je $x \in U_{\frac{\delta_i}{2}}(x_i)$, tedy $x, z \in U_{\delta_i}(x_i) \Rightarrow \varrho(f(x), f(z)) \leq \varrho(f(x), f(x_i)) + \varrho(f(z), f(x_i)) < 2\varepsilon$.

Příklady:

1) $[a, b]$ je kompaktní

2) $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ je kompaktní

3) $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{a = (a_1, a_2, \ldots), \, a_i \in \mathbb{R}\}$
   $\|a\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i^2}$
   $l_2 = \{a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \|a\|_2 < \infty\}$
   $\| \cdot \|_2$ je norma na l_2.

- l_2 je vektorový prostor (nekonečné dimenze)
  $a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots)$
  $r \cdot a = (ra_1, ra_2, \ldots)$
- $\|a\|_2 = 0 \Leftrightarrow a = 0 = (0, 0, \ldots)$
- $\|ra\|_2 = |r| \cdot \|a\|_2$
- $\|a+b\|_2 \leq \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2} \leq \lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2}) \leq \|a\|_2 + \|b\|_2$
- $B = \{a \in l_2 : \|a\|_2 \leq 1\}$ (jednotková koule) - omezená, uzavřená.
  B není kompaktní:
  $a^n = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots)$
  z posloupnosti $(a^n)_{n=1}^{\infty}$ nelze vybrat konvergentní podposloupnost.
  $a^1 = (1, 0, 0, \ldots)$
  $a^2 = (0, 1, 0, 0, \ldots)$
  $a^3 = (0, 0, 1, 0, \ldots)$
  $m \neq n : \|a^m - a^n\|_2 = \sqrt{2}$
  $\Rightarrow a^n$ nemůže konvergovat.

4) $[0,1]^{\mathbb{N}} = \{(x_1, x_2, \dots) : x_i \in [0,1]\, \forall i\}$
$x, y \in [0,1]^{\mathbb{N}} \dots d(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i}$

- součinová metrika
- Hilbertův kvádr
- zřejmě d je metrika

Platí: $x^n \to x$ v $[0,1]^{\mathbb{N}} \Leftrightarrow x_i^n \to x_i\, \forall i \in \mathbb{N}$.
$x^n \to x \Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i^n - x_i|}{2^i} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Leftrightarrow |x_i^n - x_i| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\, \forall i \in \mathbb{N}$.

Tvrzení: $[0,1]^{\mathbb{N}}$ je kompaktní metrický prostor.

Poznámka: Kompaktnost se zachovává při kartézském součinu.

Důkaz: Mějme posloupnost $x^n \in [0,1]^{\mathbb{N}}$, chceme vybrat konvergentní podposloupnost.
Z Weierstrassovy věty existuje vybraná podposloupnost: $x_1^{\sigma_1(n)} \to x_1 \in [0,1]$, $n \to \infty$
$x_2^{\sigma_2(\sigma_1(n))} \to x_2 \in [0,1]$
$\vdots$
$x_k^{\sigma_k \sigma_{k-1} \dots \sigma_1(n)} \to x_k \in [0,1]$
$\vdots$
(indukcí)
diagonální výběr: $\sigma(1) = \sigma_1(1), \sigma(2) = \sigma_2\sigma_1(2), \dots, \sigma(k) = \sigma_k\sigma_{k-1}\dots\sigma_1(k), \dots$
$x_i^{\sigma(n)} \to x_i\, \forall i \in \mathbb{N}$

5) $C[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}, f \text{ spojitá}\}$ - vektorový prostor

a) $\|f\|_s = \sup\limits_{t\in[a,b]} |f(t)|$ (supremová norma)
($\|\cdot\|_s$ je norma - cvičení!)
$B = \{f \in C[a,b] : \|f\|_s \leq 1\}$
- není kompaktní!
$f_n(t) = \sin(nt)$; $m \neq n \Rightarrow \|f_m - f_n\|_s = (*)$
$(*) = \sup\limits_{t\in[a,b]} |\sin mt - \sin nt| \not\xrightarrow[m,n\to 0]{} 0.$
$g_n(t) = t^n$, $t \in [0,1]$
Žádná vybraná podposloupnost nekonverguje v $\|\cdot\|_s$ ke spojité funkci.

b) $\|f\|_1 = \int\limits_a^b |f|$
- norma na $C[a,b]$
($\|f\|_2 = \sqrt{\int\limits_a^b |f|^2}$, $\|f\|_p = \sqrt[p]{\int\limits_a^b |f|^p}$, $p \geq 1$)

- $f = 0 \Leftrightarrow \|f\|_1 = 0$

  (plyne z: g spojitá, $g \geq 0$, $\int\limits_a^b g = 0 \Rightarrow g \equiv 0$)
- $\int\limits_a^b |f+g| \leq \int\limits_a^b |f| + \int\limits_a^b |g|$; $f_n(t) = t^n \ldots f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} 0$

$B = \{f \in C[a,b] : \|f\|_1 \leq 1\}$ není kompaktní

Přednáška 3.1.2011

Definice: (X, d) metrický prostor
Posloupnost prvků (x_n) prvků z X je cauchyovská, jestliže:
$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall m, n > n_0 : d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Definice: Řekneme, že metrický prostor (X, d) je úplný, jestliže každá jeho cauchyovská posloupnost konverguje.

Příklady:

- $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$
- $\mathbb{Q}$ není úplný
  $q_n \in \mathbb{Q}, q_n \to \sqrt{2}$
  (q_n) je cauchyovská, ale $q_n \not\to$ v $\mathbb{Q}$.
- $(0, 1)$ není úplný: $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská, ale nekonverguje v $(0, 1)$.

Tvrzení 4.6: X je úplný metrický prostor, $A \subseteq X$ uzavřená. Pak A je úplný metrický prostor.

Důkaz: $x_n \in A$, (x_n) cauchyovská v $A \Rightarrow (x_n)$ je cauchyovská v X
$\overset{\text{úplnost } X}{\Rightarrow}\ \exists x \in X$, $x_n \to x$;
A uzavřená $\Rightarrow x \in A \Rightarrow A$ je úplný.

Tvrzení 4.7: Každý kompaktní metrický prostor je úplný.

Důkaz: buď (x_n) cauchyovská v X, nechť X je kompaktní. Existuje vybraná podposloupnost $x_{\sigma(n)} \to x \in X$
Ukažme, že $x_n \to x$:
Buď dáno $\varepsilon > 0$.

1. $\exists n_0$, $\forall m, n > n_0 : d(x_m, x_n) < \varepsilon$
2. $\exists n_1$, $\forall n > n_1 : d(x_{\sigma(n)}, x) < \varepsilon$

$$n > \max\{n_0, n_1\} \Rightarrow d(x_n, x) \leq \underbrace{d(x_n, x_{\sigma(n)})}_{<\varepsilon} + \underbrace{d(x_{\sigma(n)}, x)}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon.\, (\sigma(n) \geq n > n_0)$$

Příklad: $\mathbb{R}$ je úplný, ale není kompaktní.

Poznámka: úplnost $\mathbb{R} \rightsquigarrow$ axiom suprema.

Příklad: $(C[a, b], \|\cdot\|_s) \ldots$ spojitá funkce na $[a, b]$, $\|f\|_s = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$, úplný metrický prostor.

Důkaz: (f_n) cauchyovská posloupnost v $C[a, b]$
tedy: $\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0\, \forall m, n > n_0 : \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \overset{\text{v. 2.12}}{\Rightarrow} f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$.
Podle věty 2.13 je limita f spojitá na $[a, b] \Rightarrow f_n \to f$ v $C[a, b]$.

$(C[a,b], \|\cdot\|_1)$ $\|f\|_1 = \int\limits_a^b |f|$
není úplný: nechť například $[a,b] = [-1,1]$
$f_n(x) = \begin{cases} -1 \ldots x \in [-1, -\frac{1}{n}] \\ nx \ldots x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \\ 1 \ldots x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$
$m \leq n \ldots \|f_m - f_n\| = \int\limits_{-1}^{1} |f_m - f_n| = \int\limits_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |f_m - f_n| \leq \frac{2}{m}$. (f_n) je cauchyovská.
$f_n \not\to$ v $(C[-1,1], \|\cdot\|_1)$
Kdyby $f_n \overset{\|\cdot\|_1}{\to} f$: pak $f(x) = \begin{cases} -1 \ldots x \in [-1, 0) \\ 1 \ldots x \in (0, 1] \end{cases}$ $\ldots f$ nelze spojitě dodefinovat v 0.

Definice: (X,d) metrický prostor, $f : X \mapsto X$.
Řekneme, že f je kontrakce, jestliže:
$\exists q \in (0,1)\, \forall x, y \in X : d(f(x), f(y)) \leq q \cdot d(x,y)$.

Příklad: $f(x) = \frac{x}{2} + 1$, $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$
$|f(x) - f(y)| = |(\frac{x}{2} + 1) - (\frac{y}{2} + 1)| = |\frac{x-y}{2} = \frac{1}{2}|x - y|$

Poznámka: (cvičení) Každá kontrakce je stejnoměrně spojitá.

Poznámka: Nestačí $d(f(x), f(y)) < d(x,y)\, \forall x, y \in X$!

Definice: $x \in X$ je pevným bodem zobrazení $f : X \mapsto X$, jestliže $f(x) = x$.
Pro $f : X \mapsto X$; značíme $f^1(x) = f(x)$, $f^2(x) = f(f(x)), \ldots, f^n(x) = f(f^n - 1(x)), \ldots$ iterace zobrazení f.

Věta 4.8: (Banachova věta o pevném bodu)
X úplný metrický prostor, $f : X \mapsto X$ kontrakce. Pak:

(i) f má právě jeden pevný bod $x_0 \in X$;

(ii) $\forall x \in X$, $f^n(x) \to x_0$, $n \to \infty$.

Příklad: $f(x) = 1 + \frac{x}{2}$, $X = \mathbb{R}$ (dva obrázky)

Důkaz: $x \in X$, $n \in \mathbb{N}\, (n > 1)$, $k \in \mathbb{N}$
$d(f^{n+1}(x), f^n(x)) \leq q \cdot d(f^n(x), f^{n-1}(x)) \leq q^2 \cdot d(f^{n-1}(x), f^{n-2}(x)) \leq \cdots \leq q^n \cdot d(f(x), x)$
$d(f^{n+k}(x), f^n(x)) \leq d(f^{n+k}(x), f^{n+k-1}(x)) + \cdots + d(f^{n+1}(x), f^n(x)) \leq (q^{n+k-1} + q^{n+k-2} + \cdots + q^n) \cdot d(f(x), x) = \frac{q^n - q^{n+k}}{1-q} \cdot d(f(x), x) \leq \frac{q^n}{1-q} \cdot d(f(x), x) \underset{n\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow$
$(f^n(x))_n = 1^\infty$ je cauchyovská v $X \overset{\text{úplnost}}{\Rightarrow} f^n(x) \underset{n\to\infty}{\to} x_0 \in X$.
Ukážeme, že x_0 je pevný bod f:
$x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} f^n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f^{n+1}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(\underbrace{f^n(x)}_{x_0}) \overset{f \text{ spojité}}{=} f(\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x)) =$

$f(x_0)$.

x_0 je jediný pevný bod f:
Buďte $x_0, \tilde{x}_0$ pevné body f.
$d(x_0, \tilde{x}_0) = d(f(x_0), f(\tilde{x}_0)) \leq q \cdot d(x_0, \tilde{x}_0)$
$q < 1 \Rightarrow d(x_0, \tilde{x}_0) = 0 \Rightarrow x_0 = \tilde{x}_0$.

Přednáška 10.1.2011

X je úplný metrický prostor $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ každá cauchyovská posloupnost konverguje.

Příklad: $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, (C[a,b], \|\cdot\|_s)$

Banachova věta: X úplný metrický prostor, $f : X \mapsto X$ kontrakce $\Rightarrow$

(i) $\exists! x_0 \in X, f(x_0) = x_0$ (pevný bod f)

(ii) $\forall x \in X, f^n(x) \to x_0$

Příklad: l^2 je úplný.
$l^2 = \{(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \|(a_n)\|_2 < \infty\}$
$\|(a_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2}$

Důkaz: (a^n) nechť je cauchyovská posloupnost prvků z l^2.
$\forall n \in \mathbb{N} : a^n = (a_1^n, a_2^n, \dots), \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (a_i^n)^2} < \infty$
Cauchyho podmínka: $\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0\, \forall m, n > n_0 : \|a^m - a^n\|_2 < \varepsilon$
$\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (a_i^m - a_i^n)^2} < \varepsilon$
? $a^m \xrightarrow{l^2} a$

1) zřejmě $\forall i \in \mathbb{N} : (a_i^n)_{i=1}^{\infty}$ je cauchyovská
$|a_i^m - a_i^n| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (a_i^m - a_i^n)^2}$
$\Rightarrow a_i^n \to a_i \in \mathbb{R}$ (úplnost $\mathbb{R}$), označme $a = (a_i)_{i=1}^{\infty}$

2) $a \in l^n$: cauchyovská $\Rightarrow$ omezenost
$\exists M > 0$, $\|a^n\|_2 \leq M\, \forall n \in \mathbb{N}$
limitním přechodem$_{n\to\infty}$: $\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (a_i^m - a_i^n)^2} \leq \varepsilon \Rightarrow \|a\| \leq \underbrace{\|a^m\|}_{\leq M} + \varepsilon.$

3) $a^n \xrightarrow{l^2} a$:

$$\|a^n - a\|_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (a_i^n - a_i)^2 = \underbrace{\sum_{i=1}^{i_0} (a_i^n - a_i)^2}_{0\, \forall i_0 \in \mathbb{N}} + \underbrace{\sum_{i=i_0+1}^{\infty} (a_i^n - a_i)^2}_{\leq \underbrace{\sum_{i>i_0} (a_i^n)^2}_{<\varepsilon} + \underbrace{\sum_{i>i_0} a_i^2}_{<\varepsilon \text{pro } i_0 \text{ velká}}} = \sum_{i>i_0} (a_i^n)^2 \leq$$

$$\sum_{i>i_0} [\underbrace{(a_i^{n_0})^2}_{<\varepsilon} + \underbrace{(a_i^n - a_i^{n_0})^2}_{<\varepsilon \text{ z cauchyho podmnínky}}]$$

Aplikace Banachovy věty:

1. Přibližná řešení soustav lineárních rovnic
   ($\star$) $Ax = b$, A matice $n \times n$, $x, b \in \mathbb{R}^n$
   $Ax - x = b - x$
   $(A - I)x = b - x$
   $x = (I - A)x + b$
   $L(x) = (I - A)x + b$, $L : \mathbb{R}^n \underset{\text{afinní}}{\mapsto} \mathbb{R}^n$
   hledáme pevný bod L
   ? je L kontrakce ?
   $\exists q < 1 : \|(I - A)x - (I - A)y\| \leq q\|x - y\|$
   $\|(I - A)u\| \leq q\|u\| \, \forall u \in \mathbb{R}^n$
   pokud ano: $z \in \mathbb{R}^n$ libovolný, $z^0 = z$
   $z^n = (I - A)z^{(n-1)} + b = L(z^{(n-1)})$
   $z^n \to x \ldots$ řešení ($\star$).

2. Existence a jednoznačnost řešení diferenciálních rovnic
   ($\star$) : $y' = f(x, y)$), $y_0 = y(x_0)$
   $f : G \mapsto \mathbb{R}$, $G \subseteq \mathbb{R}^2$ otevřená
   f spojitá, $(x_0, y_0) \in G$.
   (hledáme funkci $y = y(x)$, $x \in I$)

   Příklad: $y' = 2y$, $y(0) = -2$
   $$\begin{cases} y = 0 \\ \frac{y'}{y} = 2 \rightsquigarrow \int \frac{y'}{y}\,dx = \int 2\,dx \end{cases} \qquad \log|y| = 2x + C$$
   $|y| = e^{2x+C} = e^C \cdot e^{2x}$
   $y = K \cdot e^{2x}$, $(K \in \mathbb{R})$

   $-2 = K \cdot e^0$
   $y = -2e^{2x}$
   $x \in \mathbb{R}$

Věta 4.9 (Picardova):
$G \subseteq \mathbb{R}^2$ otevřená, $f : G \mapsto \mathbb{R}$ spojitá
Nechť existuje $M > 0$ tak, že $\forall (x, y), (x, z) \in G : |f(x, y) - f(x, z)| \leq M|y - z|$
Pak $\forall (x_0, y_0) \in G \, \exists \delta > 0$ tak, že rovnice ($\star$) má na intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ právě jedno řešení.

Důkaz: Buď $\delta > 0$ (bude upřesněno)
úloha ($\star$) je charakteristická rovnice
($\star\star$): $y(x) = y_o + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt$, $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$
označme operátor (zobrazení) $A : C[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \mapsto C[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$
$(Ay)(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt$
$C[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ je úplný (se supremovou normou)
A je kontrakce:
$y, z \in C[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

$\|Ay - Az\|_s = \sup\limits_{x_0-\delta\leq x\leq x_0+\delta} |\int\limits_{x_0}^{x} f(t,y(t))\,dt - \int\limits_{x_0}^{x} f(t,z(t))\,dt|$
$= \sup\limits_{x_0-\delta\leq x\leq x_0+\delta} |\int\limits_{x_0}^{x} (f(t,y(t)) - f(t,z(t)))\,dt|$
$\leq \sup\limits_{x_0-\delta\leq x\leq x_0+\delta} \int\limits_{x_0}^{x} |(f(t,y(t)) - f(t,z(t)))|\,dt$
$\leq \sup\limits_{x_0-\delta\leq x\leq x_0+\delta} \int\limits_{x_0}^{x} M \underbrace{|y(t) - z(t)|}_{\leq\|y-z\|_s}\,dt \leq \delta M\|y-z\|_s \leq \|y-z\|_s$
$q = \delta M < 1$
$0 < \delta < \frac{1}{M}$
Použijeme Banachovu větu $\rightsquigarrow \exists! y \in C[x_0-\delta, x_0+\delta],\ Ay = y \Rightarrow y$ řeší $(\star\star) \Leftrightarrow y$ řeší $(\star)$.

Příklad: $y' = \sqrt{1-y^2}$
$\frac{y'}{\sqrt{1-y^2}} = 1$
$\arcsin y = x - C$
$y = \sin(x-C),\ x \in (C - \frac{\pi}{2}, C + \frac{\pi}{2}),\ C \in \mathbb{R}$
$y = \pm 1 \ldots$ také řešení.