

M A T E M A T I C K Á A N A L Ý Z A I I I

z přednášek Doc. RNDr. Jana Rataje, CSc.

v zimním semestru akademického roku 2010/2011

zapsal Richard Dobřichovský

DISCLAIMER

Tento text je poskytován “tak jak je” bez jakékoli záruky.

Je možné, a velice pravděpodobné, že se v textu vyskytnou chyby a nedostatky; tyto se budu snažit co nejvíce eliminovat, pokud máte zájem disponovat aktuální verzí, najdete ji vždy na <http://porscher.wz.cz/mff/>. Je jasné, že bez vaší pomoci chyby odstranit nejde - narazíte-li tedy na nějakou chybu či nesrovnalost, nebojte se mne kontaktovat na dobrichovsky@gmail.com. Pomůžete tak sobě, mně a především ostatním připravujícím-se na zkoušku, ať už teď, nebo v příštích letech.

Tato verze byla vygenerována dne 16.1.2011.

PODĚKOVÁNÍ

Doc. RNDr. Janu Ratajovi, CSc. za přednášky

RNDr. Naděždě Krylové, CSc. za cvičení, poznámky a opravy

Milanu Ježkovi za půjčování sešitu

Robertu Husákovi za poznámky a opravy

Obsah

1	Vícerozměrný Riemannův integrál	3
2	Posloupnosti a řady funkcí	9
3	Fourierovy řady	24
4	Metrické prostory, část II.	28

Přednáška 4.10.2010

1 Vícerozměrný Riemannův integrál

Definice: n -rozměrný interval (box)

$$I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]; \quad -\infty < a_i < b_i < \infty; \quad i = 1, \dots, n$$

objem boxu: $|I| = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$

Dělení boxu na "podboxy":

$\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \cdots \times \mathcal{D}_n$, kde $\mathcal{D}_i = \{a_i = t_i^0 < t_i^1 < \cdots < t_i^{k_i} = b_i\}$ je dělení $[a_i, b_i]$,

tedy $\mathcal{D} = \{[t_1^{j_1-1}, t_1^{j_1}] \times \cdots \times [t_n^{j_n-1}, t_n^{j_n}] : 1 \leq j_i \leq k_i, i = 1, \dots, n\}$

norma dělení \mathcal{D} : $v(\mathcal{D}) = \max_{1 \leq i \leq n} v(\mathcal{D}_i)$

Mějme omezenou funkci $f : I \mapsto \mathbb{R}$ a dělení \mathcal{D} .

$s(f, \mathcal{D}) = \sum_{J \in \mathcal{D}} |J| \inf_J f$ nazveme dolním součtem f vzhledem k \mathcal{D}

$S(f, \mathcal{D}) = \sum_{J \in \mathcal{D}} |J| \sup_J f$ nazveme horním součtem f vzhledem k \mathcal{D}

$\int_I f = \sup_{\mathcal{D}} s(f, \mathcal{D})$ - dolní Riemannův integrál z f

$\int_I f = \inf_{\mathcal{D}} S(f, \mathcal{D})$ - horní Riemannův integrál z f

Jsou-li si rovny, definujeme Riemannův integrál z f :

$$\int_I f = \int_I f = \int_I f$$

$\mathcal{R}(I) = \{f : I \mapsto \mathbb{R} \text{ takové, že existuje } \int_I f\}$

Značení: píše se $\int_I f = \int_I f(x, y) dx dy$, $I \subseteq \mathbb{R}^2$

Poznámka: Platí analogická tvrzení jako pro jednorozměrný integrál.

Věta 1.1: $f : I \mapsto \mathbb{R}$ omezená

$$f \in \mathcal{R}(I) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \mathcal{D} : S(f, \mathcal{D}) - s(f, \mathcal{D}) < \varepsilon.$$

Věta 1.2: $f : I \mapsto \mathbb{R}$ spojitá $\Rightarrow f \in \mathcal{R}(I)$.

Poznámka k důkazu:

f spojitá $\Rightarrow f$ stejnoměrně spojitá na I . \mathcal{D} dělení, aby $\forall J \in \mathcal{D} : \sup_J f - \inf_J f < \varepsilon$.

Dále použijeme větu 1.1.

Definice: X, Y metrické prostory, $f : X \mapsto Y$. f je stejnoměrně spojitá, jestliže $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x, y \in X : d_X(x, y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Věta 1.3: $f : K \mapsto \mathbb{R}$ spojitá, K kompaktní $\Rightarrow f$ je stejnoměrně spojitá.
Připomenutí: každý box je kompaktní.

Definice: $N \subseteq \mathbb{R}^n$ je nulová množina (množina nulové (Lebesgueovy) míry), jestliže $\forall \varepsilon > 0$ existuje posloupnost boxů I_1, I_2, \dots taková, že $N \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ a platí

$$\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < \varepsilon.$$

Poznámky:

1. Každá spočetná množina je nulová.

$$N = \{x_1, x_2, \dots\}, x_i \in I_i, |I_i| < \frac{\varepsilon}{2^i}, \sum_i |I_i| < \varepsilon, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \varepsilon.$$

2. žádný box není nulová množina

3. existují nespočetné nulové množiny (příklad bude).

Definice: X, Y metrické prostory, $f : X \mapsto Y$, $\mathcal{D}_f = \{x \in X : f \text{ není spojitá v } x\}$ (body nespojitosti f).

Věta 1.4 (Lebesgne): $f : I \mapsto \mathbb{R}$ omezená. $I \subseteq \mathbb{R}^n$ box. Pak $f \in \mathcal{R}(I) \Leftrightarrow \mathcal{D}_f$ je nulová množina.

Idea důkazu v případě $n = 1$:

$$\Leftarrow: \sum_i |I_i| < \varepsilon$$

Důsledek: $f, g \in \mathcal{R}(I) \Rightarrow$

a) $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(I)$ (a platí $\int_I (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_I f + \beta \int_I g$), $\mathcal{D}_{\alpha f + \beta g} \subseteq \mathcal{D}_f \cup \mathcal{D}_g$

b) $f \circ g \in \mathcal{R}(I)$

c) $\max\{f, g\} \in \mathcal{R}(I)$

Důsledek: $f \geq 0, f \in \mathcal{R}(I), \int_I f = 0 \Rightarrow \{x : f(x) > 0\}$ je nulová množina.

Důkaz: $\{x : f(x) > 0\} \subseteq \mathcal{D}_f$.

Věta 1.5 (Fubini): $I \subseteq \mathbb{R}^m, J \subseteq \mathbb{R}^n$ boxy, $f : I \times J \mapsto \mathbb{R}$ omezená, $f \in \mathcal{R}(I \times J)$. Pak následující tři integrály existují a rovnají se:

$$\int_{I \times J} f = \int_I \left(\int_J f(x, y) dy \right) dx = \int_J \left(\int_I f(x, y) dx \right) dy. \quad (x \in I, y \in J).$$

Příklad: $\int_{[0,1]^2} (x+2y)^3 dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 (x+2y)^3 dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{(x+2y)^4}{4} \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 \frac{(x+2)^4 - x^4}{4} dx = \left[\frac{(x+2)^5 - x^5}{20} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{3^5 - 1 - 2^5 + 0}{20} = \frac{243 - 1 - 32}{20} = \frac{21}{4} = \int_0^1 \left(\int_0^1 (x+2y)^3 dx \right) dy$

$$2y)^3 dx) dy = \int_0^1 \left[\frac{(x+2y)^4}{4} \right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^1 \frac{(1+2y)^4 - (2y)^4}{4} dy = \left[\frac{(1+2y)^5 - (2y)^5}{10} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{3^5 - 2^5 - 1}{40} = \frac{21}{4}.$$

Definice: $E \subseteq \mathbb{R}^n$ omezená, ∂E nulová množina $\Rightarrow \chi_E(x) = \begin{cases} 1 \dots x \in E \\ 0 \dots x \notin E \end{cases}$

(Charakteristická funkce množiny E - platí $\chi_E \in \mathcal{R}(I)$ pro každý box $I \supseteq E$)

Objem E : $\text{vol } E = \int_I \chi_E$

Cvičení: $\text{vol } E$ nezávisí na volbě boxu $I \supseteq E$.

Přednáška 11.10.2010

Důkaz věty 1.5: označíme $\varphi(x) = \int_J f(x, y) dy$

(1) $\varphi \stackrel{?}{\in} \mathcal{R}(I)$

(2) $\int_I \varphi \stackrel{?}{=} \int_{I \times J} f$

Víme: $\forall \varepsilon > 0 \exists \mathcal{D}$ dělení $I \times J$ takové, že $s(f, \mathcal{D}) > \int_{I \times J} f = \varepsilon$.

$\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$, kde $\begin{cases} \mathcal{D}_1 \text{ dělení } I \\ \mathcal{D}_2 \text{ dělení } J \end{cases}$

$$\int_{I \times J} f - \varepsilon < s(f, \mathcal{D}) = \sum_{K \in \mathcal{D}} |K| \inf_K f = \sum_{A \times B \in \mathcal{D}} |A| \cdot |B| \underbrace{\inf_{x \in A, y \in B} f(x, y)}_{\inf_{x \in A} (\inf_{y \in B} f(x, y))} = \sum_{A \in \mathcal{D}_1} \sum_{B \in \mathcal{D}_2} |A| \inf_{x \in A} (|B| \inf_{y \in B} f(x, y)) \leq$$

$$\sum_{A \in \mathcal{D}_1} |A| \inf_{x \in A} \underbrace{\sum_{B \in \mathcal{D}_2} (|B| \inf_{y \in B} f(x, y))}_{s(f(x, \cdot), \mathcal{D}_2)}$$

$$\left(\sum_{i=1}^n \inf_u g_i(u) \leq \inf_u \sum_{i=1}^n g_i(u) \right)$$

$$= \sum_{A \in \mathcal{D}_1} |A| \inf_{x \in A} s(f(x, \cdot), \mathcal{D}_2) \stackrel{\text{def.}}{\leq} \sum_{A \in \mathcal{D}_1} |A| \inf_{x \in A} \underbrace{\int_J f(x, y) dy}_{\int_J f(x, y) dy} = \sum_{A \in \mathcal{D}_1} |A| \inf_{x \in A} \varphi_*(x)$$

!! $\varphi_*(x), \varphi^*(x) = \int_J f(x, y) dy$

Stejně dostaneme: $\exists \mathcal{D}' = \mathcal{D}'_1 \times \mathcal{D}'_2$ dělení $I \times J$ tak, že

$$\int_{I \times J} f + \varepsilon > \mathcal{S}(f, \mathcal{D}') \geq \dots \geq \sum_{A \in \mathcal{D}'_1} |A| \sup_{x \in A} \varphi^*(x).$$

$$\int_{I \times J} f - \varepsilon \leq \sum_{A \in \mathcal{D}_1} |A| \inf_{x \in A} \varphi_*(x) \leq \sum_{A \in \mathcal{D}_1} |A| \sup_{x \in A} \varphi^*(x) \leq \int_{I \times J} f + \varepsilon. (\forall \varepsilon > 0)$$

$$\Rightarrow \sup_{\mathcal{D}_1} \sum_{A \in \mathcal{D}_1} |A| \inf_{x \in A} \varphi_*(x) = \inf_{\mathcal{D}'_1} \sum_{A \in \mathcal{D}'_1} |A| \sup_{x \in A} \varphi^*(x)$$

$$\Rightarrow \int_I \varphi_* = \int_I \varphi^* \Rightarrow \int_I \varphi_* = \int_I \varphi^* \text{ (existují a rovnají se)}$$

$$\varphi_* \leq \varphi^*$$

$$\Rightarrow \int_I \underbrace{\varphi^* - \varphi_*}_{\geq 0} = 0$$

$\varphi^*(x) = \varphi_*(x)$ až na nulovou množinu.

Tedy $\varphi(x) = \int_J f(x, y) dy$ existuje pro všechna x až na nulovou množinu a platí

$$\varphi \in \mathcal{R}(I), \int_I \varphi = \int_{I \times J} f.$$

Připomenutí: vol $E = \int_I \chi_E, (E \leq I)$

Existuje, pokud ∂E je nulová množina.

$$x \mapsto \chi_E(x) \dots \mathcal{D}_{\chi_E} = \partial E$$

$$\partial E = \overline{E} \cap \mathbb{R}^n \setminus E$$

Příklad:

$E = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\} \partial E = \{x^2 + y^2 = 1\}$ je nulová množina.

Definice:

$\int_E f = \int_I f \cdot \chi_E$, $E \subseteq I$ omezená - existuje, pokud \mathcal{D}_f a ∂E jsou nulové.

Značení: necht' $E \subseteq I \times J$ omezená, I, J boxy

$x \in I \dots E^{x, \cdot} = \{y \in J : (x, y) \in E\}$ řez množiny E v $x \in I$

$y \in J \dots E^{\cdot, y} = \{x \in I : (x, y) \in E\}$

Projekce: (obrázek 1)

$\pi_1 E = \{x \in I : \exists y \in J, (x, y) \in E\}$

$\pi_2 E = \{y \in J : \exists x \in I, (x, y) \in E\}$.

Důsledek (Fubini): $E \subseteq \mathbb{R}^n$ omezená, ∂E nulová, $f : E \mapsto \mathbb{R}$ omezená. Necht'

$\int_E f$ existuje. Pak existují integrály a rovnají se:

$$\int_E f = \int_{\pi_1 E} \left(\int_{E^{x, \cdot}} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\pi_2 E} \left(\int_{E^{\cdot, y}} f(x, y) dx \right) dy.$$

Příklad: Spočítejte plochu trojúhelníku (obrázek 2):

$$\text{plocha } T = \begin{cases} \int_0^1 \int_{3-3x}^{3-\frac{3}{2}x} 1 dy dx + \int_1^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}x} 1 dy dx = \int_0^1 \frac{3}{2} x dx + \int_1^2 (3 - \frac{3}{2}x) dx = \frac{3}{4} + 3 - \frac{3}{2} \frac{4-1}{2} = \frac{3}{4} + 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{2} \\ \int_0^3 \int_{1-\frac{y}{3}}^{2-\frac{2}{3}y} dx dy = \int_0^3 (1 - \frac{y}{3}) dy = 3 - \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Ještě k nulovým množinám:

E je nulová $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists$ boxy $I_1, I_2, \dots, E \subseteq \bigcup_i I_i : \sum_i |I_i| < \varepsilon$.

Poznámka: E_1, E_2, \dots nulové množiny $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ je nulové.

Důkaz: $\forall i \dots E_i \subseteq I_i^1 \cup I_i^2 \cup I_i^3 \cup \dots$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |I_i^j| < \frac{\varepsilon}{2^i}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1 \right)$$

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} I_i^j$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |I_i^j| < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon.$$

Příklad: Existuje nespočetná nulová množina v \mathbb{R}^1 .

$[0, 1] = E_0 \supseteq E_1 \supseteq E_2 \supseteq \dots$

$E_k \dots$ sjednocení 2^k uzavřených intervalů délky $\frac{1}{3^k}$, $k = 0, 1, 2, \dots$

$E = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k \dots$ nespočetná nulová.

$$E \subseteq E_k = I_k^1 \cup \dots \cup I_k^{2^k}; \sum_{j=1}^{2^k} |I_k^j| = 2^k \cdot \frac{1}{3^k} = \left(\frac{2}{3}\right)^k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty.$$

$x \in [0, 1] \dots$ reprezentace v trojkové soustavě: $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i}$, $x_i \in \{0, 1, 2\}$, $x =$

(x_1, x_2, x_3, \dots)

$x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$, $x_i \neq 1 \forall i$

$\Rightarrow x \in E \Rightarrow E$ je nespočetná.

$E \dots$ Cantorovo diskontinuum.

Přednáška 18.10.2010

Substituce

Připomenutí: $f : \varphi([a, b]) \mapsto \mathbb{R}$

$$\int_a^b f \circ \varphi(t) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx$$

Definice: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ otevřená, neprázdná, $\varphi : U \mapsto \mathbb{R}^n$

φ je **regulární** na U , jestliže:

- (a) φ je třídy C^1 (tzn. existují spojité parciální derivace 1. řádu na U .)
- (b) φ je prosté na U
- (c) $D\varphi(u)$ má hodnost $n \forall u \in U$

Motivační příklad: $I \subseteq \mathbb{R}^n$ box, $L : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ lineární

vol $L(I) = ?$

platí: vol $L(I) = |\det L| \cdot |I|$

$$L = \begin{pmatrix} - & u_1 & - \\ - & u_2 & - \\ & \vdots & \\ - & u_n & - \end{pmatrix}$$

bud' $\|v\| = 1, v \perp u_i \forall i \leq n-1$

vyjádříme $u_n = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{n-1} u_{n-1} + \beta v; \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \beta \in \mathbb{R}$

$$\det L = \beta \det \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ v \end{pmatrix}$$

Definice: $\varphi : U \mapsto \mathbb{R}^n$ regulární, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ otevřená

$\mathcal{J}\varphi(u) \stackrel{\text{def.}}{=} \det D\varphi(u) \dots$ Jakobián zobrazení φ v bodě u . (Zřejmě $\mathcal{J}\varphi(u) \neq 0$.)

Věta 1.8 (o substituci): $A \subseteq \mathbb{R}^n$ omezená, ∂A nulová množina

$\varphi : \text{int } A \mapsto \mathbb{R}^n$ regulární; $f : \varphi(A) \mapsto \mathbb{R}$.

Pak $\int_A (f \circ \varphi) |\mathcal{J}\varphi| = \int_{\varphi(A)} f$, má-li jeden z integrálů smysl.

Příklad 1: polární substituce $\varphi : (r, t) \mapsto (r \cos t, r \sin t), r > 0, \varphi \in (0, 2\pi)$

$U = (0, \infty) \times (0, 2\pi)$

$\varphi(U) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\}$

L_0 : nulová množina

$$\begin{aligned} \iint_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} \frac{dx dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} r dr dt = 2\pi \int_0^1 \frac{r dr}{\sqrt{1-r^2}} = \\ &= \left[\begin{array}{l|l} s = 1 - r^2 & x = r \cos t \\ ds = -2r dr & y = r \sin t \end{array} \middle| \varphi(A) = \{x^2 + y^2 \leq 1\} \setminus L_0 \right] = \pi \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{s}} = \pi [2\sqrt{s}]_0^1 = \\ &2\pi \\ \mathcal{J}\varphi(r, t) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos t & -r \sin t \\ \sin t & r \cos t \end{vmatrix} = r. \end{aligned}$$

Příklad 2: sférické souřadnice
$$\begin{cases} [c|c]x = r \cos u \cos v & r > 0 \\ y = r \sin u \cos v & u \in (0, 2\pi) \\ z = r \sin v & v \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

$$\mathcal{J}\varphi(r, u, v) = \begin{vmatrix} \cos u \cos v & -r \sin u \cos v & -r \cos u \sin v \\ \sin u \cos v & r \cos u \cos v & -r \sin u \sin v \\ \sin v & 0 & r \cos v \end{vmatrix} = \sin v (r^2 \sin^2 u \sin v \cos v + r^2 \cos^2 u \sin v \cos v) + r \cos v (r \cos^2 u \cos^2 v + r \sin^2 u \cos^2 v) = r^2 \sin v \sin v \cos v + r^2 \cos v \cos^2 v = r^2 \cos v$$

$$\iiint_{\{x^2+y^2+z^2 < 1\}} z^2 dx dy dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \sin^2 v r^2 \cos v dr du dv = \int_0^{2\pi} du \cdot \int_0^1 r^4 dr \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 v \cos v dv =$$

$$2\pi \frac{1}{5} \int_{-1}^1 p^2 dp = \frac{2\pi}{5} \frac{2}{3} = \frac{4\pi}{15}$$

$$(\sin v = p, \cos v dv = dp)$$

2 Posloupnosti a řady funkcí

2.1. Komplexní čísla

Definice: $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \dots$ množina komplexních čísel
sčítání a násobení skaláru (jako v \mathbb{R}^2)

$$z \in \mathbb{C} \dots z = (x, y)$$

$i = (0, 1) \dots$ imaginární jednotka

$$z = x + iy \begin{cases} x = \operatorname{Re} z \text{ (reálná část)} \\ y = \operatorname{Im} z \text{ (imaginární část)} \end{cases}$$

Definice: operace násobení na \mathbb{C}

$$z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$$

$$z_1 \cdot z_2 \stackrel{\text{def.}}{=} (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1); i^2 = -1$$

- násobení je komutativní a asociativní
- $1 = 1 + i0$ je jednotkovým prvkem vzhledem k násobení
- $\forall z \neq 0, z \in \mathbb{C} \exists z^{-1} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}; (z = x + iy)$

Tvrzení 2.1: $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ je komutativní těleso.

Poznámka: Na \mathbb{C} nelze definovat uspořádání, abychom dostali uspořádané těleso rozšiřující $(\mathbb{R}, <)$.

Důkaz sporem: nechtě $(\mathbb{C}, <)$ je uspořádané těleso.

$$i \neq 0 \begin{cases} i > 0 \Rightarrow i \cdot i > 0 \cdot i \Rightarrow -1 > 0 \dots \text{spor} \\ i < 0 \Rightarrow i \cdot (-i) < 0 \cdot (-i) \Rightarrow 1 < 0 \dots \text{spor} \end{cases}$$

Definice: $z \in \mathbb{C}, z = x + iy \dots \bar{z} = x - iy \in \mathbb{C}$ je komplexně sdružené číslo k číslu z .

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \dots \text{absolutní hodnota komplexního čísla } z.$$

Poznámka: $|z| = \|(x, y)\|$

Tedy pro $|\cdot|$ platí trojúhelníková nerovnost.

$(z_n) \dots$ posloupnost komplexních čísel, $z \in \mathbb{C}$

$z_n \rightarrow z, n \rightarrow \infty, \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} |z_n - z| \rightarrow 0.$

(Totéž jako konvergence v $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$)

Tvrzení 2.2: $[z_n = x_n + iy_n \rightarrow x + iy = z] \Leftrightarrow x_n \rightarrow x \wedge y_n \rightarrow y.$

Důkaz: $\max\{|x_n - x|, |y_n - y|\} \leq |z_n - z| \leq |x_n - x| + |y_n - y|$

(bylo, $\sqrt{\sum a_i^2} \leq \sum |a_i|$)

Připomenutí - Bolzano-Cauchyova podmínka konvergence (věta 3.8 LS '09):

(z_n) konverguje $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall m, n > n_0 : |z_m - z_n| < \varepsilon.$

Definice: $z_n \in \mathbb{C} \dots \sum_{n=0}^{\infty} z_n$ konverguje, jestliže $s_n = \sum_{k=0}^n z_k \rightarrow s \in \mathbb{C}.$

Tvrzení 2.3: $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n| < \infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} z_n$ konverguje.

(Důkaz z Bolzano-Cauchyovy podmínky.)

Přednáška 25.10.2010

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n, z_n \in \mathbb{C}$$

$$s_n = z_0 + \dots + z_n \in \mathbb{C}$$

$$s_n \rightarrow s \in \mathbb{C} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} z_n = s.$$

Věta 2.4 (Dirichletovo a Abelovo Kriterium konvergence řady):

$a_n \in \mathbb{C}, b_n \geq 0, (b_n)$ nerostoucí. Pak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ konverguje, je-li splněna některá z podmínek:

[Abelovo kriterium:] $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje;

[Dirichletovo kriterium:] $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má omezené částečné součty a $b_n \rightarrow 0$.

Poznámka: Leibnitzovo kriterium plyne z Dirichletova: $a_n = (-1)^n$.

Příklad: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ konverguje ($x > 0$).

Důkaz: $a_n = \sin(nx), b_n = \frac{1}{n}$.

? $\sum a_n$ má omezené částečné součty

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

$$2 \sin \frac{x}{2} \sum_{k=1}^n \sin kx = \sum_{k=1}^n (\cos(\frac{1}{2} - k)x - \cos(\frac{1}{2} + k)x) = \cos \frac{x}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})x$$

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin kx \right| = \left| \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} \right| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|} \cdot (\sin \frac{x}{2} \neq 0).$$

Důkaz Dirichletova kriteria

$b_n \geq 0$: Buď dáno $\varepsilon > 0$.

$\exists n_0, 0 < b_{n_0} < \varepsilon$

$s_n = a_0 + \dots + a_n; \exists M : |s_n| \leq M < \infty \forall n$.

Podle BC kriteria potřebujeme dokázat:

$$\exists n_1 \forall n > m > n_1 : \left| \sum_{k=m+1}^n a_k b_k \right| < \varepsilon.$$

$$\begin{aligned} & a_{m+1}b_{m+1} + a_{m+2}b_{m+2} + \dots + a_n b_n = \\ & = (s_{m+1} - s_m)b_{m+1} + (s_{m+2} - s_{m+1})b_{m+2} + \dots + (s_n - s_{n-1})b_n = \\ & = s_{m+1} \underbrace{(b_{m+1} - b_{m+2})}_{\geq 0} + s_{m+2} \underbrace{(b_{m+2} - b_{m+3})}_{\geq 0} + \dots + s_{n-1} \underbrace{(b_{n-1} - b_n)}_{\geq 0} - s_m b_{m+1} + \end{aligned}$$

$s_m b_n$

$$\left| \sum_{m+1}^n a_k b_k \right| \leq M(b_{m+1} - b_n) + 2M b_{m+1} \leq 3M b_{m+1} < 3M \varepsilon \text{ pro } m < n_0.$$

2.2. Funkce komplexní proměnné

$$D \subseteq \mathbb{C}, f : D \mapsto \mathbb{C}$$

$$f = f_1 + i f_2 = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$$

značení:

$$U_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$$

$P_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$
 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$, spojitost f v z_0 jako v \mathbb{R}^2 .

Definice: Nechť funkce f je definována na nějakém okolí bodu $z_0 \in \mathbb{C}$. Derivaci f v bodě z_0 definujeme $f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ pokud limita existuje (v \mathbb{C}).

Poznámka: Nelze derivovat zvlášť reálnou a imaginární část.

Tvrzení 2.5: Existuje-li $f'(z_0) \in \mathbb{C}$, pak je f v bodě z_0 spojitá.

Důkaz: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) - f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} (z - z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} (to\ je\ f'(z_0)) \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) (to\ je\ 0) = 0$.

Cvičení: $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = 0$, $h(z)$ omezená na $P_\varepsilon(z_0) \Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} g \cdot h(z) = 0$.

Příklad: $(z^n)' = nz^{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}$)

Tvrzení 2.6: $f' = 0$ na $\mathbb{C} \Rightarrow f$ je konstantní v \mathbb{C} .

Důkaz: $f = f_1 + if_2$, $g(x) = f(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$, $g = g_1 + ig_2$

$$g'(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(x+t) - g(x)}{t} = \lim_{(t,s) \rightarrow (0,0)} \frac{f((x,y)+(t,s)) - f(x,y)}{t+is} = 0.$$

$0 = g'(x) = g_1'(x) + ig_2'(x) \Rightarrow g_1'(x) = g_2'(x) = 0 \Rightarrow g_1, g_2$ jsou konstantní
 $\Rightarrow f$ je konstantní na $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$.

vezmeme $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$

$$g(t) = f((1-t)a + tb), t \in \mathbb{R}$$

$$g'(t) = 0 \Rightarrow g \text{ konstantní} \Rightarrow g(a) = g(b).$$

Věta 2.7 (Cauchy-Riemannovy podmínky existence derivace komplexní funkce)

Nechť $f = f_1 + if_2$ je definována na okolí bodu $z_0 \in \mathbb{C}$; značíme $z = x + iy$.

Pak $f'(z_0)$ existuje právě tehdy, když existují $\frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0)$, $\frac{\partial f_1}{\partial y}(z_0)$, $i = 1, 2$ a platí

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(z_0), \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0).$$

$$f = f_1 + if_2$$

$$f(z) = f(x + iy)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x}, \frac{\partial f_i}{\partial y}, i = 1, 2$$

$$\frac{1}{i} = -i$$

$$\text{Pak platí: } f'(z_0) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0)$$

Důkaz $\Rightarrow f'(z_0) = \lim_{t \rightarrow 0, t \in \mathbb{R}} \frac{f(z_0+t) - f(z_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0, t \in \mathbb{R}} \frac{f(z_0+it) - f(z_0)}{it} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_1(x_0+t, y_0) - f_1(x_0, y_0)}{t} +$
 $i \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_2(x_0+t, y_0) - f_2(x_0, y_0)}{t} = (-i) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_1(x_0, y_0+t) - f_1(x_0, y_0)}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_2(x_0, y_0+t) - f_2(x_0, y_0)}{t}$.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, x \in \mathbb{R}$$

2.3. Mocninné řady

Definice: $e^z = \exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$, $z \in \mathbb{C}$.

Poznámka: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ konverguje absolutně $\forall z \in \mathbb{C}$:

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!}$ konverguje podle podílového kritéria: $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{|z|}{k+1} \rightarrow 0$.

Přednáška 1.11.2010

Tvrzení 2.8: $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$, $z, w \in \mathbb{C}$

Důkaz: $z_0 \in \mathbb{C}$ pevné

$$(e^z)' = (1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots)' \stackrel{v.2.11}{=} 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots = e^z$$

Označím $g(z) = e^z \cdot e^{z_0-z}$

$$g'(z) = e^z \cdot e^{z_0-z} - e^z \cdot e^{z_0-z} = 0$$

$\Rightarrow g = \text{konstantní na } \mathbb{C}$

$$e^0 = 1, g(0) = e^{z_0} \Rightarrow e^{z_0} = e^z \cdot e^{z_0-z} \forall z \in \mathbb{C}$$

$$e^{w+z} = e^z \cdot e^w. (z_0 - z = w, z_0 = z + w).$$

Důsledek: $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$, $z \in \mathbb{C}$

$$e^z \neq 0 \forall z \in \mathbb{C}$$

Mocninná řada: $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ (*)

$z_0 \in \mathbb{C} \dots$ střed mocninné řady

$a_k \in \mathbb{C} \dots$ koeficienty

Tvrzení 2.9: Jestliže (*) konverguje pro nějaké $z \in \mathbb{C}$ a $w \in \mathbb{C}$ splňuje $|w - z_0| < |z - z_0|$, pak (*) konverguje pro w absolutně.

Důkaz: $|a_k(w - z_0)^k| = |a_k(z - z_0)^k| \left| \frac{w - z_0}{z - z_0} \right|^k \leq M \cdot q^k \dots$ geometrická řada

$(0 \leq q < 1$; zřejmě $z \neq z_0$)

$$\sum_k a_k(z - z_0)^k \text{ konverguje} \Rightarrow \exists M > 0, \forall k \in \mathbb{N} : |a_k(z - z_0)^k| \leq M.$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k(w - z_0)^k \text{ konverguje absolutně.}$$

Definice: $R = \sup\{|z - z_0| : (*) \text{ konverguje v } z\} \in [0, \infty]$ (poloměr konvergence mocninné řady (*))

$$\mathcal{K}(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$$

Důsledek: (*) konverguje absolutně všude v $\mathcal{K}(z_0, R)$ a diverguje všude na $\{z : |z - z_0| > R\}$.

Poznámka: na hranici $\partial\mathcal{K}(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R\}$ může mocninná řada konvergovat i divergovat.

Příklad: 1) $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \dots R = \infty.$

2) $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \dots R = 1.$

Tvrzení 2.10: Mocninné řady (*) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)$ a (*)' $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k(z - z_0)^{k-1}$ mají stejný poloměr konvergence.

Důkaz: BÚNO necht' $z_0 = 0$.

označme $R \dots$ poloměr konvergence (*)

$R' \dots$ poloměr konvergence (*)'

R' je též poloměr konvergence řady $\sum_{k=1}^{\infty} ka_k z^k$.

1) $R' \leq R$: $R' = 0 \dots$ jasné.

nechť $R' > 0$, zvolme $0 < r < R'$

$\sum ka_k z^k$ konverguje absolutně na $\{z : |z| = r\}$

$\Rightarrow \sum a_k z^k$ konverguje absolutně na $\{z : |z| = r\}$

$\Rightarrow R \geq r \Rightarrow R \geq R'$.

2) $R \leq R'$. Nechť $R > 0$ (jinak jasné)

$0 < r < R$, $z \in \mathbb{C}$, $r < |z| < R$

$\sum a_k z^k$ konverguje absolutně v z

$\Rightarrow \exists M > 0, \forall k : |a_k z^k| \leq M$

$|ka_k r^k| = |a_k z^k| k \left(\frac{r}{|z|}\right)^k \Rightarrow \sum k|a_k| r^k$ konverguje

$\Rightarrow R' \geq r, R' \geq R$.

Věta 2.11: Nechť řada $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ má poloměr konvergence $R > 0$.

Pak $f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} ka_k (z - z_0)^{k-1}$, $z \in \mathcal{K}(z_0, R)$.

Důkaz: BÚNO $z_0 = 0$.

označme $s_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$, $R_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k$.

$f(z) = s_n(z) + R_n(z)$

zvolme $w \in \mathbb{C}$, $|w| < R$, $r > 0$, $0 < |w| < r < R$

pro $z \neq w$, $|z| < R$:

$$\frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w) = \left(\frac{s_n(z) - s_n(w)}{z - w} - s'_n(w) \right) + (s'_n(w) - g(w)) + \frac{R_n(z) - R_n(w)}{z - w}$$

$$g(w) = \sum_{k=1}^{\infty} ka_k w^{k-1}$$

$$\frac{R_n(z) - R_n(w)}{z - w} = \frac{1}{z - w} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k (z^k - w^k) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \frac{z^k - w^k}{z - w};$$

$$\left| \frac{z^k - w^k}{z - w} \right| = |z^{k-1} + z^{k-2}w + z^{k-3}w^2 + \dots + w^{k-1}| \leq kr^{k-1}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{R_n(z) - R_n(w)}{z - w} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| kr^{k-1} < \varepsilon \text{ pro dostatečně velké } n \in \mathbb{N}.$$

$$|s'_n(w) - g(w)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} ka_k w^{k-1} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} k|a_k| r^{k-1} < \varepsilon \text{ pro dostatečně velká } n.$$

$$\left| \frac{s_n(z) - s_n(w)}{z - w} - s'_n(w) \right| < \varepsilon \text{ pro } |w - z| < \delta \text{ "dostatečně malé"}.$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w) \right| < 3\varepsilon \text{ pro } |z - w| < \delta$$

$$\Rightarrow f'(w) = g(w).$$

Důsledek: Má-li $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ poloměr konvergence $R > 0$, má f v

$\mathcal{K}(z_0, R)$ derivace všech řádů a platí: $f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n (z - z_0)^{n-k}$, $k \in \mathbb{N}$.

Důsledek: Platí $a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Tedy koeficienty mocninné řady s kladným poloměrem konvergence jsou jednoznačně určeny.

Poznámka: $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$, $R > 0$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{(z - z_0)^{k+1}}{k+1}$$

Pak $F(z)$ má rovněž poloměr konvergence R a platí $F' = f$ na $\mathcal{K}(z_0, R)$.

Příklad: $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$ ($R = 1$, $\frac{1}{1+x^2} = (\arctg x)'$)

$$\Rightarrow \arctg x = a_0 + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$\arctg 0 = 0 \Rightarrow a_0 = 0. (R = 1)$$

2.3. Stejněměrná konvergence

Poznámka: $f_n \rightarrow f$ na $M \Leftrightarrow f_n(x) \rightarrow f(x) \forall x \in M$

Definice: $A \neq \emptyset; f_n, f : A \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$

$f_n \rightrightarrows f$ na $A \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 \forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Posoupnost funkcí (f_n) stejnoměrně konverguje k funkci f na množině A .

Poznámky: 1) $f_n \rightrightarrows f$ na $A \Leftrightarrow \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

2) $f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow f_n - f \rightrightarrows 0$.

3) $f_n \rightrightarrows f$ na $A \Rightarrow f_n \rightarrow f$ na A ($f_n(x) \rightarrow f(x) \forall x \in A$) (Bodová konvergence).

Příklad: $f_n(x) = x^n, x \in [0, 1]$

$$f_n(x) \rightarrow \begin{cases} 0 \dots x < 1 \\ 1 \dots x = 1 \end{cases}$$

$$f_n(x) \rightarrow f, f(x) = \begin{cases} 0 \dots x < 1 \\ 1 \dots x = 1 \end{cases}$$

$\forall n \in \mathbb{N} : \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1 \Rightarrow f_n \not\rightrightarrows f$ na $[0, 1]$

$\forall q < 1 : f_n \rightrightarrows f$ na $[0, q]$ neboť: $\sup_{x \in [0,q]} |f_n(x) - f(x)| = q^n \rightarrow 0$ (ale: $f_n \not\rightrightarrows f$ na $[0, 1)$).

Věta 2.12 (BC-podmínka pro stejnoměrnou konvergenci)

Nechť funkce f_n ($n \in \mathbb{N}$) jsou definovány na množině A . Pak $f_n \rightrightarrows f$ na $A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall m, n > n_0 : \sup_{x \in A} |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$. (tzn. $\exists f, f_n \rightrightarrows f$ na A)

Důkaz: \Rightarrow snadné

$\Leftarrow \forall x \in A : (\text{B-C}) \Rightarrow \exists f(x), f_n(x) \rightarrow f(x)$.

$m, n > n_0 : \sup_{x \in A} |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon \Rightarrow \forall n > n_0, \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$,

Poznámka - důležitá:

(X, d) metrický prostor. $\mathcal{C}(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C}, f \text{ spojitá}\}$

$f \in \mathcal{C}(X) \dots \|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$

? $\|\cdot\|$ je norma na $\mathcal{C}(X)$

(1) $\|f\| \geq 0, \|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$

(2) $\|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$

(3) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$

Platí: $f_n \rightarrow f$ na $X \Leftrightarrow \|f_n - f\| \rightarrow 0$

Tedy stejnoměrná konvergence spojitých funkcí je konvergencí v NLP $\mathcal{C}(X)$.

($\mathcal{C}(X)$ nemá konečnou dimenzi pro X nekonečnou)

Otázka: $f_n \rightarrow f, f_n$ spojitá $\stackrel{?}{\Rightarrow} f$ spojitá.

NE ... $x^n \rightarrow$ nespojitá funkce na $[0, 1]$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \stackrel{?}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = f(x_0)$

Věta 2.13 (Cauchy):

f_n spojité funkce na metrickém prostoru (X, d)

$f_n \rightrightarrows f$ na $X \Rightarrow f$ je spojitá.

Důkaz: Zvolme $x_0 \in X$ pevně, $\varepsilon > 0$.

Potřebujeme: $\exists \delta > 0, d(x, x_0) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{< \frac{\varepsilon}{3} - \text{stm.konv.}} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(x_0)|}_{< \frac{\varepsilon}{3} - \text{pro } d(x, x_0) < \delta, \exists \delta > 0, \text{spojitost } f_n} + \underbrace{|f_n(x_0) - f(x_0)|}_{< \frac{\varepsilon}{3} - \text{stm.konv.}} <$$

$\varepsilon. (\exists n_0, \forall n > n_0 : n > n_0 \text{ pevné.})$

Definice: $f_n, f : X \rightarrow \mathbb{C}$

$f_n \rightrightarrows_{\text{loc}} f \Leftrightarrow \forall x \in X \exists$ okolí U bodu x takové, že $f_n \rightrightarrows f$ na U .

(Lokálně stejnoměrná konvergence)

Příklad: $x^n \not\rightrightarrows 0$ na $[0, 1)$.

$x^n \rightrightarrows_{\text{loc}} 0$ na $[0, 1)$.

Poznámka: X je kompaktní metrický prostor.

$\Rightarrow [f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow f_n \rightrightarrows_{\text{loc}} f]$. (Důkaz bude.)

Definice: $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}; \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na $A \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} s_n = f_1 + \dots + f_n \rightrightarrows$ na A .

Píšeme $\sum_{n=0}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na $A; \sum_{n=0}^{\infty} f_n \rightrightarrows s$ na A .

Příklad: $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, x \in (-1, 1) \dots s_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

$\forall q \in (0, 1) : \sum_{k=0}^{\infty} x^k \rightrightarrows \frac{1}{1-x}$ na $[-q, q]$ ale ne na $(-1, 1)$.

Tvrzení 2.14 (Weistrassův text)

$f_n \rightrightarrows f$ na $A \Leftrightarrow \exists (\alpha_n), \alpha_n \rightarrow 0, \forall n : \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n$.

Důkaz: Použijeme větu (bude později): “Z každého otevřeného pokrytí kompaktu lze vybrat konečné podpokrytí.”

Neboli: X kompaktní, $X \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha, G_\alpha$ otevřené množiny, $I \neq \emptyset \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in I$

$I : X \subseteq G_{\alpha_1} \cup \dots \cup G_{\alpha_n}$.

Věta 2.15 (Dimi):

Nechť (f_n) je monotónní posloupnost spojitých funkcí na kompaktním metrickém prostoru (X, d) . Jestliže $f_n \rightarrow f$ na X , pak $f_n \rightrightarrows f$ na X .

Poznámka:

$f_1 \leq f_2 \leq \dots f_n \nearrow f$

$f_1 \geq f_2 \geq \dots f_n \searrow f$

Důkaz: $g_n = f_n - f$

$$\begin{cases} f_n \searrow f \dots g_n \geq 0, g_n \searrow 0 \\ f_n \nearrow f \dots g_n \leq 0, g_n \nearrow 0 \text{ (podobně)} \end{cases} \quad \text{Bud' } \varepsilon > 0 \text{ dáno.}$$

$$\forall x \in X \exists n_x \in \mathbb{N} : g_{n_x}(x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall x \in X \exists \text{ okolí } U(x) \forall y \in U(x) : |g_{n_x}(y) - g_{n_x}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow g_{n_x}(y) < \varepsilon \text{ (spojitost } g_{n_x} \text{ v } x)$$

$$X \subseteq \bigcup_{x \in X} U(x) \text{ - otevřené pokrytí}$$

$$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \exists x_1, \dots, x_n \in X : X \subseteq U(x_1) \cup \dots \cup U(x_n).$$

$$n_0 = \max\{n_{x_1}, \dots, n_{x_n}\}$$

$$n > n_0 \Rightarrow \forall y \in X \exists i \leq n, y \in U(x_i) \Rightarrow g_n(y) < g_{n_{x_i}}(y) < \varepsilon$$

$$\sup_{y \in X} |g_n(y)| < \varepsilon \Rightarrow g_n \Rightarrow 0 \text{ na } X.$$

Přednáška 15.11.2010

- $f_n \rightrightarrows f$
- f_n spojitá, $f_n \rightrightarrows f \Rightarrow f$ spojitá
- $f_n \nearrow f$ ($f_n \searrow f$) na kompaktu $\Rightarrow f_n \rightrightarrows f$

Příklad (obrázek na papíře 1)

$$f_n = g_1 + \dots + g_n$$

$$f_n \nearrow f \ (n \rightarrow \infty) \text{ na } (0, 1]$$

$$f_n \not\rightrightarrows f : \sup |f_n - f| = 1 \not\rightarrow 0.$$

Věta 2.16 (O majorantní řadě, Weierstrassův test):

Funkce f_k jsou definovány na množině A .

Nechť $\sup_{x \in A} |f_k(x)| \leq \alpha_k, k \in \mathbb{N}$;

Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k < \infty$. Pak $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konverguje stejnoměrně na A .

Poznámka: $\sum_k \|f_k\| < \infty \Rightarrow \sum f_k \rightrightarrows$.

Důkaz: $\varepsilon > 0$ dáno, $\exists n_0, \forall m > n > n_0 : \sup_{x \in A} \left| \sum_{k=n+1}^m f_k(x) \right| < \varepsilon$.

$$s_n = f_1 + \dots + f_n$$

$s_m - s_n = f_{n+1} + \dots + f_m$ - patří tyhle řádky sem?

$$\sup_{x \in A} \left| \sum_{k=n+1}^m f_k(x) \right| \leq \sup_{x \in A} \sum_{k=n+1}^m |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^m \sup_{x \in A} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^m \alpha_k < \varepsilon. \text{ (B-}$$

C podmínka pro $\sum_k \alpha_k < \infty$.)

Příklad: $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k^2 x)}{k^2}$

$$\left| \frac{\sin(k^2 x)}{k^2} \right| \leq \frac{1}{k^2}$$

\Rightarrow řada konverguje stejnoměrně na \mathbb{R} .

Věta 2.13 $\Rightarrow g$ je spojitá na \mathbb{R} .

Příklad (obrázek na papíře 2)

$g_n \dots$ "špička" výšky $\frac{1}{n}$ na intervalu $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$

$\sum g_n$ konverguje na $(0, 1]$

$$\sup_x \left| \sum_{k=1}^n g_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) \right| \leq \frac{1}{n+1}$$

$\sum g_k \rightrightarrows$ na $(0, 1]$

ALE $\sup |g_k(x)| = \frac{1}{k}$

$$\sum_k \frac{1}{k} = \infty.$$

Věta 2.17: Nechť existují $(R) \int_a^b f_n$, nechť $f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$. Pak $\exists (R) \int_a^b f$ a platí

$$(R) \int_a^b f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (R) \int_a^b f.$$

Důkaz: Označme $a_n = \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)|$.

Bud' $\varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n > n_0 : |a_n| < \varepsilon$, tedy $f_n(x) - \varepsilon \leq f(x) \leq f_n(x) + \varepsilon \forall x \in [a, b]$.

\mathcal{D} ... dělení intervalu $[a, b]$.

$$s(f_n, \mathcal{D}) - \varepsilon(b-a) \leq s(f, \mathcal{D}) \leq \begin{cases} s(f_n, \mathcal{D}) + \varepsilon(b-a) \\ \mathcal{S}(f, \mathcal{D}) \leq \mathcal{S}(f_n, \mathcal{D}) + \varepsilon(b-a) \end{cases}$$

$$-\varepsilon(b-a) + \int_{\frac{b}{a}}^{\frac{a}{b}} f_n \leq \int_a^b f \leq \int_a^b f_n + \varepsilon(b-a)$$

$$\Rightarrow \text{existuje } (\mathcal{R}) \int_a^b f \left(\int_a^b f_n - \int_a^b f \right) \leq 2\varepsilon(b-a)$$

$$\left(\int_a^b f - \int_a^b f_n \right) < 2\varepsilon(b-a) \text{ pro } n > m_0.$$

Příklad (obrázek na papíře 3) $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ Mocninná řada s poloměrem konvergence R . Necht' $0 < r < R$. Pak $f(z)$ konverguje stejnoměrně (absolutně) na $\bar{K}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$.

Důkaz: Bud' $w \in \mathbb{C}$, $r < |w| < R$.

$$|z| \leq r \Rightarrow |a_k| |z - z_0|^k \leq \underbrace{|a_k(w - z_0)^k|}_{\text{omez.}} \underbrace{\left(\frac{r}{|w - z_0|} \right)^k}_{< 1} = \alpha_k.$$

$$\sum \alpha_k < \infty.$$

$$f_n \rightarrow f, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\lim_{y \rightarrow x} f_n(y)}_{a_n} = \lim_{y \rightarrow x} \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(y)}_{f(x)}$$

Věta 2.19 (Moore-Osgood): (X, d) metrický prostor, $x_0 \in X$ hromadný bod X (tzn. $\{x_0\}$ není otevřená). Bud' (f_n) posloupnost reálných nebo komplexních funkcí na $X \setminus \{x_0\}$. Necht':

- (1) $f_n \rightrightarrows f$ na $X \setminus \{x_0\}$
- (2) $\forall n \in \mathbb{N} \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = a_n \in \mathbb{C}$

Pak existují limity: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Důkaz: Mějme $\varepsilon > 0$.

$$\exists n_0, m, n > n_0 \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon \forall x \in X \setminus \{x_0\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |\dots| = |a_m - a_n| < \varepsilon$$

$$\varepsilon \Rightarrow \exists a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n; \quad ? f(x) \rightarrow a, \quad x \rightarrow x_0.$$

$$|f(x) - a| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_n(x) - a_n|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|a_n - a|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon.$$

(pevné $n \in \mathbb{N}$ dost velké, $\exists \delta > 0$, $\forall x \in P_\delta(x_0)$ - odůvodnění $< \frac{\varepsilon}{3}$).

Příklad: $X = [x_0, y_0)$

$$X \setminus \{x_0\} = (x_0, y_0)$$

$$f_n \rightrightarrows f \text{ na } (x_0, y_0) \text{ a } \exists a_n = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f_n(x) \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Příklad:

1. $f_n(x) = \frac{\sin(n^2 x)}{n}$; $f_n \rightrightarrows 0$ na \mathbb{R}
 $f'_n(x) = n \cos(n^2 x) \not\rightrightarrows$ na \mathbb{R} .

2. $g_n(x) = \sin \frac{x}{n^2}$; $g_n \rightarrow 0$, $g_n \not\rightrightarrows$ na \mathbb{R}

$$g'_n(x) = \frac{1}{n^2} \cos \frac{x}{n^2} \rightrightarrows 0 \text{ na } \mathbb{R}$$

$[f_n \rightrightarrows_{\text{loc.}} f \not\Rightarrow f'_n \rightrightarrows_{\text{loc.}} f']$, “ \Leftarrow ” ano.

Věta 2.20 (Weierstrass):

$$f_n : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}(\mathbb{R})$$

Nechť existují f'_n na (a, b) , $n \in \mathbb{N}$.

Nechť dále platí:

(i) $\exists x_0 \in (a, b)$, $(f_n(x_0))_{n=1}^\infty$ konverguje

(ii) $f'_n \rightrightarrows_{\text{loc.}}$ na (a, b) .

Pak $f_n \rightrightarrows_{\text{loc.}}$ na (a, b) a funkce $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ má derivaci na (a, b) splňující

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x), \quad x \in (a, b).$$

Příklad: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^2+n}{n^2}$

$$\frac{x^2+n}{n^2} = \frac{x^2}{n^2} + \frac{1}{n} \searrow 0$$

Leibnitz \Rightarrow řada konverguje $\forall x \in \mathbb{R}$ neabsolutně!

$$\sup_{|x| \leq K} |s_m(x) - s_n(x)| \leq \sup_{|x| \leq K} |a_{n+1}(x)| \rightarrow 0. \quad (m > n)$$

\Rightarrow řada konverguje lokálně stejnoměrně.

Přednáška 22.11.2010

Věta 2.19 (Moore-Osgoodova - připomenutí): $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{y \rightarrow x} f_n(y) = \lim_{y \rightarrow x} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(y)$

Důkaz věty 2.20 (Weierstrass): $x \neq y \in (a, b)$

(*) $\frac{(f_m(y) - f_m(x)) - (f_n(y) - f_n(x))}{y-x} = f'_m(c) - f'_n(c)$ pro nějaké c mezi x a y . (Lagrangeova věta pro $f_m - f_n$.)

Zvolme $[u, v] \subseteq (a, b)$, $x_0, x \in [u, v]$, $x_0 \neq x$.

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |(f_m(x) - f_n(x)) - (f_m(x_0) - f_n(x_0))| + |f_m(x_0) - f_n(x_0)| \leq \varepsilon > 0 : \leq \underbrace{(\leq v-u)}_{(\leq v-u)} \cdot \underbrace{|f'_m(c) - f'_n(c)|}_{(< \varepsilon \text{ pro } m, n \text{ velké})} + \underbrace{|f_m(x_0) - f_n(x_0)|}_{(< \varepsilon \text{ pro } m, n \text{ velké})} \leq \varepsilon(v-u+1)$$

B-C podmínka $\Rightarrow f_n \Rightarrow$ na $[u, v] \Rightarrow f_n \Rightarrow_{\text{loc}}$ na (a, b) ; $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$

Bud' $x \in [u, v] \subseteq (a, b)$ pevný

Definujeme $\Phi_n(y) = \frac{f_n(y) - f_n(x)}{y-x}$, $\Phi(y) = \frac{f(y) - f(x)}{y-x}$, $y \in [c, d] \setminus \{x\}$.

$\Phi_n \Rightarrow_{\text{loc}}$ na $[c, d] \setminus \{x\}$ podle (*). ($\Phi_n \rightarrow \Phi$).

$\forall n \in \mathbb{N} : \lim_{y \rightarrow x} \Phi_n(y) = f'_n(x)$

Moore-Osgood pro Φ_n na $[c, d] \setminus \{x\}$:

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = \lim_{y \rightarrow x} \Phi(y) = f'(x).$$

Věta 2.21: $f_n \Rightarrow f$ na omezeném intervalu (a, b) a necht' existují $(\mathcal{N}) \int_a^b f_n \forall n \in \mathbb{N}$.

Pak existuje $(\mathcal{N}) \int_a^b f$ a je roven $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n$.

Důkaz: $F'_n = f_n$ na (a, b)

$x_0 \in (a, b)$ pevné, $F_n(x_0) = 0 \forall n$.

Weierstrassova věta pro $F_n \Rightarrow F_n \Rightarrow$ na (a, b)

$$F = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n; F' = f.$$

$$(\mathcal{N}) \int_a^b f_n = F_n(b_-) - F_n(a_+)$$

$$\text{Moore-Osgood: } (\mathcal{N}) \int_a^b f_n = F(b_-) - F(a_+)$$

Příklad: $\sum a_n(z - z_0)^n \Rightarrow_{\text{loc}}$ v $\mathcal{K}(z_0, R)$

? na hranici - př. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$

$$\text{Příklad: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x t^{n-1} dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\log(1-x), x \in (-1, 1).$$

Věta 2.22 (Abel): Necht' $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konverguje. Pak pro funkci $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

$$\text{platí: } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

Důkaz: $s_k = b_0 + \dots + b_k$, $b_{-1} = 0$.

$$\sum_{k=0}^n b_k x^k = \sum_{k=0}^n (s_k - s_{k-1}) x^k = s_n x^n + (1-x) \sum_{k=0}^{n-1} s_k x^k$$

$$n \rightarrow \infty, |x| < 1 : f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n b_k x^k = (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k$$

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{k=0}^{\infty} b_k; \varepsilon > 0; \exists n_0, n > n_0 \Rightarrow |s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$(1-x) \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1, |x| < 1.$$

$$\forall n : \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \sum_{k=0}^n |s_k - s| = 0$$

$$\exists \delta > 0, \forall x \in (1-\delta, 1) : |f(x) - s| = |(1-x) \sum_{k=0}^{\infty} (s_k - s)x^k| \leq$$

$$\leq \underbrace{(1-x) \sum_{k=0}^n |s_k - s| x^k}_{< \frac{\varepsilon}{2} \text{ pro } 1-\delta < x < 1} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} |s_k - s| \frac{x^k}{1-x}}_{< \frac{\varepsilon}{2}, n \text{ dosti velké, pevné}} < \varepsilon.$$

Důsledek 2.23: Necht $w \neq z_0 \in \mathbb{C}$ a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(w - z_0)^n$ konverguje.

Pak pro $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ platí: $\lim_{t \rightarrow 1^-} f(z_0 + t(w - z_0)) = f(w)$.

Příklad: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \log 2$.

3 Fourierovy řady

$$f(x) \begin{cases} f(x) = \sum a_n(x - x_0)^n \\ f(x) = \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \end{cases}$$

$$f(z) = \sum_n z^n = \sum a_n e^{int} = \sum a_n (\cos nt + i \sin nt)$$

$$|z| = 1 : z = e^{it} = \cos t + i \sin t$$

Definice: Trigonometrický polynom:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

$a_k, b_k \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), n \in \mathbb{N}$ nebo $n = 0$.

$T_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T$: zřejmě T bude 2π -periodická.

Pozorování: f je p -periodická funkce na \mathbb{R} ($p > 0$) \Rightarrow

$$(1) \int_0^p f = \int_a^{a+p} f \forall a \in \mathbb{R}$$

$$(2) \int_0^p f(x+c) dx = \int_0^p f(x) dx \forall c \in \mathbb{R}.$$

Definice: $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ je po částech spojitá, jestliže existuje konečná množina $F \subseteq [a, b]$ taková, že f je spojitá na $[a, b] \setminus F$ a $\forall x \in [a, b]$ existuje:

$$(1) f(x_+) = \lim_{y \rightarrow x_+} f(y), (x \neq b) \text{ a}$$

$$(2) f(x_-) = \lim_{y \rightarrow x_-} f(y), (x \neq a)$$

Přednáška 29.11.2010

$$T_n(t) = \sum_{k=0}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

Po částech spojitá funkce - obrázek.

Tvrzení 3.1: $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ po částech spojitá.

$$\text{Pak } \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin tx \, dx = 0.$$

Důkaz: 1) $f \equiv c$ na $[a, b]$ (konstantní funkce)

$$|c \cdot \int_a^b \sin tx \, dx| = | -\frac{c}{t} [\cos tx]_a^b | \leq \frac{2|c|}{t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

2) $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ spojitá $\Rightarrow f$ je stejnoměrně spojitá na $[a, b] \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists$ dělení $\mathcal{D} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ tak, že $\forall i \leq n \forall x \in$

$[x_{i-1}, x_i] : |f(x) - f(x_i)| < \varepsilon.$

$$|\int_a^b f(x) \sin tx \, dx| = |\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} [(f(x) - f(x_i)) \sin tx + f(x_i) \sin tx] \, dx| \leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \underbrace{|f(x) - f(x_i)|}_{< \varepsilon} \underbrace{|\sin tx|}_{< 1} \, dx +$$

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i)| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sin tx \, dx \leq \varepsilon(b-a) + \sum_{i=1}^n |f(x_i)| \frac{2}{t} \stackrel{t > \frac{2}{\varepsilon} \sum_{i=1}^n |f(x_i)|}{\leq} \varepsilon(b-a+1).$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) \sin tx \, dx \rightarrow 0$$

$$\textbf{Tvrzení 3.2: } \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(k\varphi) = \frac{\sin((2n+1)\frac{\varphi}{2})}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}, \varphi \in \mathbb{R}.$$

Poznámka: Funkce na pravé straně je definována a spojitá na \mathbb{R} (cvičení).

Důkaz: $\sin(x+y) - \sin(y-x) = 2 \sin x \cos y.$

$$2 \sin \frac{\varphi}{2} (\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(k\varphi)) = \sin \frac{\varphi}{2} + \sum_{k=1}^n (\sin((k+\frac{1}{2})\varphi) - \sin((k-\frac{1}{2})\varphi)) = \sin((n+\frac{1}{2})\varphi).$$

Poznámka: $D_n(\varphi) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2}\varphi)}{2 \sin \frac{\varphi}{2}} \dots$ Dirichletovo jádro (Dirichlet kernel).

Definice: $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ 2π -periodická, po částech spojitá na $[-\pi, \pi].$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) \, dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) \, dt, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(trigonometrické polynomy)

cíl: $s_n(x) \xrightarrow{''} f(x)$

Definice: $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ je po částech hladká, jestliže existuje dělení $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ intervalu $[a, b]$ takové, že

1) f je spojitá a existuje f' na $(x_{i-1}, x_i) \forall i \leq n$

2) existují vlastní limity $\lim_{x \rightarrow x_{i-1}^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_i^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_{i-1}^+} f'(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_i^-} f'(x)$.

Tvrzení 3.3: f 2π -periodická, po částech hladká na $[-\pi, \pi]$. Pak $s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x+t) + f(x-t)) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt$, $x \in \mathbb{R}$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Důkaz: $s_n(x) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi (\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx)) f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi (\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t-x)) f(t) dt = \left| \begin{matrix} t = x+z \\ dt = dz \end{matrix} \right| = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi (\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kz) f(x+z) dz \stackrel{3.2}{=} \frac{1}{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})z}{2 \sin \frac{z}{2}} f(x+z) dz = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x+z) + f(x-z)) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})z}{2 \sin \frac{z}{2}} dz.$

Důsledek: $\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}} dt = 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Důkaz: $f \equiv 1$, $n = 0$, $a_0 = 2$ v T.3.3: $s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi 2 \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = \frac{a_0}{2} = 1$

$a_n = b_n = 0 \forall n \geq 1$.

Věta 3.4: $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ 2π -periodická, po částech hladká na $[-\pi, \pi]$.

Pak $s_n(x) \rightarrow \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ ($n \rightarrow \infty$).

Důkaz: $s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x+t) + f(x-t)) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [(f(x_+) + f(x_-)) + (f(x+t) - f(x_+)) + (f(x-t) - f(x_-))] \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\frac{f(x+t) - f(x_+)}{t} + \frac{f(x-t) - f(x_-)}{t}] \frac{\frac{t}{2}}{\sin t} \sin(n + \frac{1}{2})t dt.$
 $g(t) = [\frac{f(x+t) - f(x_+)}{t} + \frac{f(x-t) - f(x_-)}{t}] \frac{\frac{t}{2}}{\sin t} \dots$ po částech spojitá funkce na $[0, \pi]$.
 $\int_0^\pi g(t) \sin(n + \frac{1}{2})t dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$ (Tvrzení 3.1)

Přednáška 6.12.2010

Věta 3.4: f 2π -periodická, po částech hladká na $[-\pi, \pi]$.

Pak $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{f(x_-) + f(x_+)}{2} \forall x \in \mathbb{R}$.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt$$

Důsledek: Je-li f p -periodická a po částech hladká na $[0, p]$, pak $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{2\pi}{p} nt + b_n \sin \frac{2\pi}{p} nt) = \frac{f(t_-) + f(t_+)}{2}$, kde $a_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \cos \frac{2\pi}{p} nt \, dt$, $b_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \sin \frac{2\pi}{p} nt \, dt$

Poznámka: f sudá $\Rightarrow b_n = 0 \forall n$

f lichá $\Rightarrow a_n = 0 \forall n$ (podle věty 3.4)

Důsledek: Je-li f jako ve větě 3.4 a konvergují-li řady $\sum |a_n|$ a $\sum |b_n|$, pak: $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \Rightarrow f(x)$ na \mathbb{R} .

Důkaz: $\sum_n |a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq \sum_n (|a_n| + |b_n|) < \infty$
 \Rightarrow stejnoměrná konvergence k $\frac{f(x_-) + f(x_+)}{2} \Rightarrow \text{cauchy} \Rightarrow g(x) = \frac{f(x_-) + f(x_+)}{2}$ je spojitá na $\mathbb{R} \Rightarrow g(x) \neq f(x), x \in \mathbb{R}$.

Důsledek: Pokud $\sum_n n|a_n| < \infty, \sum_n n|b_n| < \infty$, pak $[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)]' = \sum_{n=1}^{\infty} (-na_n \sin nx + nb_n \cos nx) \forall x \in \mathbb{R}$.

Důkaz: Weierstrassova věta.

Příklad 1: $f(x) = x, x \in (-\pi, \pi)$

f je lichá $\Rightarrow a_k = 0 \forall k$.

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin kt \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin kt \, dt = \begin{pmatrix} u = t, & v' = \sin kt \\ u' = 1, & v = -\frac{\cos kt}{k} \end{pmatrix} = -\frac{2}{\pi} \left(\left[-\frac{t \cos kt}{k} \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos kt}{k} \, dt \right)$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(-\pi \cos k\pi + \left[\frac{\sin kt}{k} \right]_0^{\pi} \right) = -\frac{2}{\pi} \cos k\pi = \frac{2}{\pi} (-1)^{k-1}$$

$$x = 2 \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right), x \in (-\pi, \pi)$$

$$x = \frac{\pi}{2} : \frac{\pi}{2} = 2 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots \right)$$

Příklad 2: $f(x) = x^2, x \in [-\pi, \pi]$

f sudá $\Rightarrow b_k = 0, \forall k$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \, dt = \frac{1}{\pi} \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$\begin{pmatrix} u = t^2, & v' = \cos kt \\ u' = 2t, & v = \frac{\sin kt}{k} \end{pmatrix}$$

$$k \geq 1 : a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 \cos kt \, dt = \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{t^2 \sin kt}{k} \right]_0^{\pi} - 2 \int_0^{\pi} t \sin kt \, dt \right) = \frac{2}{\pi} \left(\pi^2 \sin k\pi - \right.$$

$$\left. 2 \frac{\pi}{k} (-1)^{k-1} \right) = \frac{4}{k^2} (-1)^k.$$

$$x^2 = \frac{1}{3} \pi^2 - 4 \left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots \right), x \in [-\pi, \pi]$$

$$x = 0 : 0 = \frac{1}{3} \pi^2 - 4 \left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots \right)$$

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{12}$$

$$x = \pi : \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(-1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \dots \right)$$

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

4 Metrické prostory, část II.

Opakování:

(X, d) $d : X \times X \mapsto [0, \infty)$

(Y, ϱ)

$f : X \mapsto Y$ je spojité, jestliže $\forall x \in X \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x' \in X : d(x, x') < \delta \Rightarrow \varrho(f(x), f(x')) < \varepsilon$.

$G \subseteq X$ je otevřená, jestliže $\forall x \in G \exists \varepsilon > 0, U_\varepsilon(x) \subseteq G$.

$F \subseteq X$ je uzavřená, jestliže $X \setminus F$ je otevřená.

Věta: F je uzavřená v $X \Leftrightarrow \forall (x_n) \subseteq F,$

$x_n \rightarrow x \Rightarrow x \in F$

Věta: $f : X \mapsto Y$ je spojité $\Leftrightarrow \forall G \subseteq Y$ otevřené, $f^{-1}(G)$ je otevřené.

$f : X \mapsto Y$ je spojité $\Leftrightarrow \forall F \subseteq Y$ uzavřené, $f^{-1}(F)$ je uzavřená.

Definice: Metrický prostor (X, d) je kompaktní, jestliže z každé posloupnosti v X lze vybrat konvergentní podposloupnost (například $[a, b]$).

Věta: $K \subseteq X$ kompaktní $\Rightarrow K$ je omezená a uzavřená.

Věta: X kompaktní, $F \subseteq X$ uzavřená $\Rightarrow F$ kompaktní.

Věta: Kvádr $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ je kompaktní (v \mathbb{R}^n)

$(x^k) \subseteq \times_{i=1}^n [a_i, b_i], x^k = (x_1^k, \dots, x_n^k) \in \mathbb{R}^n$

$(x^{\sigma_1(k)})$ vybraná, $x_1^{\sigma_1(k)} \rightarrow x_1 \in [a_1, b_1]$ (Weierstrass)

$(x^{\sigma_2(\sigma_1(k))})$ vybraná, $x_2^{\sigma_2(\sigma_1(k))} \rightarrow x_2 \in [a_2, b_2]$

Věta: $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktní $\Leftrightarrow A$ je omezená a uzavřená.

Věta: Spojitá funkce nabývá na kompaktu svého minima i maxima.

$\varkappa(f) \subseteq \mathbb{R}$ je kompaktní.

Přednáška 13.12.2010

Věta 4.1 (základní věta algebry):

V tělese \mathbb{C} má každý nekonstantní polynom alespoň jeden kořen.

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$
$$a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{C}; z \in \mathbb{C}$$
$$a_n \neq 0 \dots p \text{ má stupeň } n.$$
$$z \text{ je kořen } p \dots p(z) = 0$$

Tvrzení 4.2:

p polynom v \mathbb{C} .

Funkce $f(z) = |p(z)|$ nabývá v \mathbb{C} svého minima.

Důkaz: f spojitá, $f \geq 0$

problém: \mathbb{C} není kompaktní

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = \infty : \forall K > 0 \exists R > 0, |z| > R \Rightarrow f(z) > K.$$

zvolme $K = |a_0| = f(0) = |p(0)|$

f nabývá na $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ svého minima (v bodě z_0)

$$\min_{z \in \mathbb{C}} f(z) = \min_{|z| \leq R} f(z)$$

protože: $|z| > R \Rightarrow f(z) > f(0)$

$$? \min_z f(z) = 0 ?$$

Cvičení: Předpokládat p nekonstantní.

Tvrzení 4.3: p nekonstantní polynom v \mathbb{C} , $|p(z_0)| > 0$ pro nějaké $z_0 \in \mathbb{C}$.

Pak $|p|$ nenabývá v z_0 lokálního minima.

Poznámka: Neplatí v \mathbb{R} : $p(x) = x^2 + 1$

Poznámka 2: Z tvrzení 4.2 a 4.3 plyne věta 4.1.

Důkaz: Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $z_0 = 0$. (Jinak vezměme

$$\tilde{p}(z) = p(z - z_0)$$

$$p(z) = a_0 + a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \dots + a_n z^n$$

$$a_0 \neq 0; a_k \neq 0. (k = \min\{i \geq 1 : |a_i| > 0\})$$

$$\text{Idea: } |p(z)| = \underbrace{|a_0 + a_k z^k|}_{< |a_0| \text{ pro vhodné } z} + o(|z|^k); |z| \text{ "malé"}$$

$$a_0 = \varrho_0 e^{i\theta_0} (= \varrho_0 (\cos \theta_0 + i \sin \theta_0)); \varrho_0 > 0$$

$$a_k = \varrho_k e^{i\theta_k}; \varrho_k > 0$$

$$z = r e^{i\varrho}$$

$$a_0 + a_k z^k = \varrho_0 e^{i\theta_0} + \varrho_k e^{i\theta_k} r^k e^{ik\varrho} = \varrho_0 e^{i\theta_0} + \varrho_k r^k e^{i(\theta_k + k\varrho)} = \varrho_0 e^{i\theta_0} - \varrho_k r^k e^{i\theta_0} =$$

$$(\varrho_0 - \varrho_k r^k) e^{i\theta_0}$$

$$\theta_k + k\varphi = \pi + \theta_0$$

$$\varphi = \frac{\pi + \theta_0 + \theta_k}{k}$$

$$e^{i(\pi + \theta_0)} = e^{i\pi} e^{i\theta_0} = -e^{i\theta_0}$$

$$|p(re^{i\varphi})| \leq |a_0 + a_k(re^{i\varphi})^k| + \sum_{j=k+1}^n |a_j|(re^{i\varphi})^j \leq \rho_0 - \rho_k r^k + \sum_{j=k+1}^n |a_j| r^j <$$

$$\rho_0 - \frac{\rho_k}{2} r^k \text{ pro } r > 0 \text{ dostatečně malé.}$$

$$|a_{k+1}| r^{k+1} + \dots + |a_n| r^n < \frac{\rho_k}{2} r^k \text{ pro } r \text{ malé}$$

$$\underbrace{|a_{k+1}| r + \dots + |a_n| r^{n-k}}_{\text{spojitá v } r} < \frac{\rho_k}{2}$$

Pokrývání otevřenými množinami

(X, d) metrický prostor, $A \subseteq X$

$A \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$, $G_i \subseteq X$ otevřené, $I \neq \emptyset$ (I může být i nespočetná!)

- otevřené pokrytí množiny A .

Věta 4.4 (topologická charakterizace kompaktnosti): $A \subseteq X$, X metrický prostor.

Je ekvivalentní:

(i) A je kompaktní

(ii) pro každé otevřené pokrytí $A \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$ existuje $n \in \mathbb{N}$ a indexy $i_1, \dots, i_n \in I$,

$A \subseteq \bigcup_{j=1}^n G_{i_j}$ (konečné podpokrytí)

Poznámka: $A = [a, b] \dots \Leftrightarrow$ (ii) (Borelova pokrývací věta)

Důkaz: (i) \Rightarrow (ii): BÚNO necht' $A = X$.

a) Ukážeme, že pro kompaktní prostor X platí:

(*) $\forall r > 0 \exists S \subseteq X$ konečná taková, že $\bigcup_{a \in S} U_r(a) = X$.

$S \dots r$ -sít' v X , $U_r(a) = \{x \in X : d(x, a) < r\}$, $d(a_n, a_m) \leq \varepsilon$

((*) \dots prekompaktnost)

Necht' (*) neplatí, tedy pro nějaké $r > 0$ neexistuje r -sít' v X . Sestrojíme indukci posloupnost bodů $a_n \in X$, $d(a_i, a_n) \geq r \forall i < n$. Zřejmě žádná vybraná podposloupnost z (a_n) nekonverguje - spor s kompaktností.

Bud' $X \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$ otevřené pokrytí X .

$n \in \mathbb{N} \dots S_n \subseteq X \dots$ konečná $\frac{1}{n}$ -sít'.

Jestliže $\exists n \in \mathbb{N}, \forall a \in S_n \exists i(a) \in I, U_{\frac{1}{n}}(a) \subseteq G_{i(a)}$, pak $\bigcup_{a \in S_n} G_{i(a)}$ je konečné

podpokrytí X .

Necht' naopak $\forall n \in \mathbb{N} \exists a_n \in S_n \forall i \in I : U_{\frac{1}{n}}(a_n) \not\subseteq G_i$.

X kompaktní \Rightarrow existuje vybraná podposloupnost $a_{\sigma(n)} \rightarrow a \in X$.

$\exists j \in I, a \in G_j$

G_j otevřená $\Rightarrow \exists r < 0, U_r(a) \subseteq G_j$.

Vezměme $n \in \mathbb{N}$ tak velké, aby: (i) $d(a_{\sigma(n)}, a) < \frac{r}{2}$,

(ii) $\frac{1}{\sigma(n)} < \frac{r}{2}$.

Pak $U_{\frac{1}{\sigma(n)}}(a_{\sigma(n)}) \subseteq U_r(a) \subseteq G_j$ - spor.

(ii) \Rightarrow (i): necht' $a_n \in X, n \in \mathbb{N}$

Ukážu: (**) $\exists a \in X \forall r > 0 : \{n \in \mathbb{N} : a_n \in U_r(a)\}$ je nekonečná.

Kdyby ne: $\forall a \in X \exists r(a) > 0, I(a) = \{n : a_n \in U_{r(a)}(a)\}$ je konečná

$X = \bigcup_{a \in X} U_{r(a)}(a)$

z předpokladu existence konečného podpokrytí: $X = \bigcup_{i=1}^n U_{r(b_i)}(b_i)$

$I = \bigcup_{i=1}^n I(b_i) \dots$ konečná množina

$n_0 \in \mathbb{N} \setminus I$; $a_{n_0} \in U_{r(b_i)}(b_i)$ pro nějaké $i \leq n$ - spor.

(**) $\Rightarrow a$ je hromadným bodem $\{a_n\}$.

Přednáška 20.12.2010

Věta 4.4: X je kompaktní metrický prostor \Leftrightarrow z každého otevřeného pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí.

Důsledek 4.5: X, Y metrické prostory
 $f : X \mapsto Y$ spojitý. Je-li X kompaktní, je f stejnoměrně spojitý.

Důkaz: f spojitý: $\forall x \in X \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_x > 0 : d(z, x) < \delta_x \Rightarrow \varrho(f(z), f(x)) < \varepsilon$.

$(X, d), (Y, \varrho)$

$X \subseteq \bigcup_{x \in X} U_{\frac{\delta_x}{2}}(x) \dots$ otevřené pokrytí X $U_\delta(x) = \{z \in X : d(z, x) < \delta\}$

$\stackrel{v. 4.4}{\Rightarrow}$ existují $x_1, \dots, x_n \in X, X \subseteq U_{\frac{\delta_1}{2}}(x_1) \cup \dots \cup U_{\frac{\delta_n}{2}}(x_n)$

$\delta_i = \delta_{x_i}$, vezmeme $\delta = \min\{\frac{\delta_1}{2}, \dots, \frac{\delta_n}{2}\} > 0$

Buďte $x, z \in X, d(x, z) < \delta$, pro nějaké $i \leq n$ je $x \in U_{\frac{\delta_i}{2}}(x_i)$, tedy $x, z \in U_{\delta_i}(x_i) \Rightarrow \varrho(f(x), f(z)) \leq \varrho(f(x), f(x_i)) + \varrho(f(z), f(x_i)) < 2\varepsilon$.

Příklady:

- 1) $[a, b]$ je kompaktní
- 2) $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ je kompaktní
- 3) $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{a = (a_1, a_2, \dots), a_i \in \mathbb{R}\}$

$$\|a\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2}$$

$$l_2 = \{a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \|a\|_2 < \infty\}$$

$\|\cdot\|_2$ je norma na l_2 .

- l_2 je vektorový prostor (nekonečné dimenze)
 $a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$
 $r \cdot a = (ra_1, ra_2, \dots)$
- $\|a\|_2 = 0 \Leftrightarrow a = 0 = (0, 0, \dots)$
- $\|ra\|_2 = |r| \cdot \|a\|_2$
- $\|a+b\|_2 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}) \leq \|a\|_2 + \|b\|_2$
- $B = \{a \in l_2 : \|a\|_2 \leq 1\}$ (jednotková koule) - omezená, uzavřená.
 B není kompaktní:
 $a^n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$
z posloupnosti $(a^n)_{n=1}^{\infty}$ nelze vybrat konvergentní podposloupnost.
 $a^1 = (1, 0, 0, \dots)$
 $a^2 = (0, 1, 0, 0, \dots)$
 $a^3 = (0, 0, 1, 0, \dots)$
 $m \neq n : \|a^m - a^n\|_2 = \sqrt{2}$
 $\Rightarrow a^n$ nemůže konvergovat.

$$4) [0, 1]^{\mathbb{N}} = \{(x_1, x_2, \dots) : x_i \in [0, 1] \forall i\}$$

$$x, y \in [0, 1]^{\mathbb{N}} \dots d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i}$$

- součinnová metrika
- Hilbertův kvádr
- zřejmě d je metrika

Platí: $x^n \rightarrow x$ v $[0, 1]^{\mathbb{N}} \Leftrightarrow x_i^n \rightarrow x_i \forall i \in \mathbb{N}$.

$$x^n \rightarrow x \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i^n - x_i|}{2^i} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow |x_i^n - x_i| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \forall i \in \mathbb{N}.$$

Tvrzení: $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ je kompaktní metrický prostor.

Poznámka: Kompaktnost se zachovává při kartézském součinu.

Důkaz: Mějme posloupnost $x^n \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$, chceme vybrat konvergentní podposloupnost.

Z Weierstrassovy věty existuje vybraná podposloupnost: $x_1^{\sigma_1(n)} \rightarrow x_1 \in [0, 1], n \rightarrow \infty$

$$x_2^{\sigma_2(\sigma_1(n))} \rightarrow x_2 \in [0, 1]$$

⋮

$$x_k^{\sigma_k \sigma_{k-1} \dots \sigma_1(n)} \rightarrow x_k \in [0, 1]$$

⋮

(indukcí)

diagonální výběr: $\sigma(1) = \sigma_1(1), \sigma(2) = \sigma_2 \sigma_1(2), \dots, \sigma(k) = \sigma_k \sigma_{k-1} \dots \sigma_1(k), \dots$

$$x_i^{\sigma(n)} \rightarrow x_i \forall i \in \mathbb{N}$$

5) $C[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ spojitá}\}$ - vektorový prostor

$$a) \|f\|_s = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)| \text{ (supremová norma)}$$

($\|\cdot\|_s$ je norma - cvičení!)

$$B = \{f \in C[a, b] : \|f\|_s \leq 1\}$$

- není kompaktní!

$$f_n(t) = \sin(nt); m \neq n \Rightarrow \|f_m - f_n\|_s = (*)$$

$$(*) = \sup_{t \in [a, b]} |\sin mt - \sin nt| \not\xrightarrow{m, n \rightarrow 0} 0.$$

$$g_n(t) = t^n, t \in [0, 1]$$

Žádná vybraná podposloupnost nekonverguje v $\|\cdot\|_s$ ke spojitě funkci.

$$b) \|f\|_1 = \int_a^b |f|$$

- norma na $C[a, b]$

$$(\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f|^2}, \|f\|_p = \sqrt[p]{\int_a^b |f|^p}, p \geq 1)$$

- $f = 0 \Leftrightarrow \|f\|_1 = 0$
 (plyne z: g spojitá, $g \geq 0$, $\int_a^b g = 0 \Rightarrow g \equiv 0$)
- $\int_a^b |f + g| \leq \int_a^b |f| + \int_a^b |g|$; $f_n(t) = t^n \dots f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} 0$

$B = \{f \in C[a, b] : \|f\|_1 \leq 1\}$ není kompaktní

Přednáška 3.1.2011

Definice: (X, d) metrický prostor

Posloupnost prvků (x_n) prvků z X je cauchyovská, jestliže:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n > n_0 : d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Definice: Řekneme, že metrický prostor (X, d) je úplný, jestliže každá jeho cauchyovská posloupnost konverguje.

Příklady:

- \mathbb{R}, \mathbb{R}^n
- \mathbb{Q} není úplný
 $q_n \in \mathbb{Q}, q_n \rightarrow \sqrt{2}$
 (q_n) je cauchyovská, ale $q_n \not\rightarrow$ v \mathbb{Q} .
- $(0, 1)$ není úplný: $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská, ale nekonverguje v $(0, 1)$.

Tvrzení 4.6: X je úplný metrický prostor, $A \subseteq X$ uzavřená. Pak A je úplný metrický prostor.

Důkaz: $x_n \in A, (x_n)$ cauchyovská v $A \Rightarrow (x_n)$ je cauchyovská v X

$$\stackrel{\text{úplnost } X}{\Rightarrow} \exists x \in X, x_n \rightarrow x;$$

A uzavřená $\Rightarrow x \in A \Rightarrow A$ je úplný.

Tvrzení 4.7: Každý kompaktní metrický prostor je úplný.

Důkaz: buď (x_n) cauchyovská v X , nechť X je kompaktní. Existuje vybraná podposloupnost $x_{\sigma(n)} \rightarrow x \in X$

Ukažme, že $x_n \rightarrow x$:

Buď dáno $\varepsilon > 0$.

$$1. \exists n_0, \forall m, n > n_0 : d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

$$2. \exists n_1, \forall n > n_1 : d(x_{\sigma(n)}, x) < \varepsilon$$

$$n > \max\{n_0, n_1\} \Rightarrow d(x_n, x) \leq \underbrace{d(x_n, x_{\sigma(n)})}_{< \varepsilon} + \underbrace{d(x_{\sigma(n)}, x)}_{< \varepsilon} < 2\varepsilon. (\sigma(n) \geq n > n_0)$$

Příklad: \mathbb{R} je úplný, ale není kompaktní.

Poznámka: úplnost $\mathbb{R} \rightsquigarrow$ axiom suprema.

Příklad: $(C[a, b], \|\cdot\|_s) \dots$ spojitá funkce na $[a, b]$, $\|f\|_s = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$, úplný metrický prostor.

Důkaz: (f_n) cauchyovská posloupnost v $C[a, b]$

$$\text{tedy: } \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall m, n > n_0 : \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \stackrel{\text{v. 2.12}}{\Rightarrow} f_n \Rightarrow f \text{ na } [a, b].$$

Podle věty 2.13 je limita f spojitá na $[a, b] \Rightarrow f_n \rightarrow f$ v $C[a, b]$.

$$(C[a, b], \|\cdot\|_1) \|f\|_1 = \int_a^b |f|$$

není úplný: necht' například $[a, b] = [-1, 1]$

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 \dots x \in [-1, -\frac{1}{n}] \\ nx \dots x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \\ 1 \dots x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

$$m \leq n \dots \|f_m - f_n\| = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |f_m - f_n| = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |f_m - f_n| \leq \frac{2}{m}. (f_n) \text{ je cauchyovská.}$$

$f_n \not\rightarrow$ v $(C[-1, 1], \|\cdot\|_1)$

Kdyby $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f$: pak $f(x) = \begin{cases} -1 \dots x \in [-1, 0) \\ 1 \dots x \in (0, 1] \end{cases}$... f nelze spojitě dodefinovat v 0.

Definice: (X, d) metrický prostor, $f : X \mapsto X$.

Řekneme, že f je kontrakce, jestliže:

$$\exists q \in (0, 1) \forall x, y \in X : d(f(x), f(y)) \leq q \cdot d(x, y).$$

Příklad: $f(x) = \frac{x}{2} + 1, f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$$|f(x) - f(y)| = |(\frac{x}{2} + 1) - (\frac{y}{2} + 1)| = |\frac{x-y}{2}| = \frac{1}{2}|x - y|$$

Poznámka: (cvičení) Každá kontrakce je stejnoměrně spojitá.

Poznámka: Nestačí $d(f(x), f(y)) < d(x, y) \forall x, y \in X$!

Definice: $x \in X$ je pevným bodem zobrazení $f : X \mapsto X$, jestliže $f(x) = x$.

Pro $f : X \mapsto X$; značíme $f^1(x) = f(x), f^2(x) = f(f(x)), \dots, f^n(x) = f(f^{n-1}(x)), \dots$ iterace zobrazení f .

Věta 4.8: (Banachova věta o pevném bodu)

X úplný metrický prostor, $f : X \mapsto X$ kontrakce. Pak:

- (i) f má právě jeden pevný bod $x_0 \in X$;
- (ii) $\forall x \in X, f^n(x) \rightarrow x_0, n \rightarrow \infty$.

Příklad: $f(x) = 1 + \frac{x}{2}, X = \mathbb{R}$ (dva obrázky)

Důkaz: $x \in X, n \in \mathbb{N} (n > 1), k \in \mathbb{N}$

$$d(f^{n+1}(x), f^n(x)) \leq q \cdot d(f^n(x), f^{n-1}(x)) \leq q^2 \cdot d(f^{n-1}(x), f^{n-2}(x)) \leq \dots \leq q^n \cdot d(f(x), x)$$

$$d(f^{n+k}(x), f^n(x)) \leq d(f^{n+k}(x), f^{n+k-1}(x)) + \dots + d(f^{n+1}(x), f^n(x)) \leq (q^{n+k-1} + q^{n+k-2} + \dots + q^n) \cdot d(f(x), x) = \frac{q^n - q^{n+k}}{1-q} \cdot d(f(x), x) \leq \frac{q^n}{1-q} \cdot d(f(x), x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow$$

$(f^n(x))_n = 1^\infty$ je cauchyovská v $X \stackrel{\text{úplnost}}{\Rightarrow} f^n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0 \in X$.

Ukážeme, že x_0 je pevný bod f :

$$x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{n+1}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{f(f^n(x))}_{x_0} \stackrel{f \text{ spojitě}}{=} f(\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)) =$$

$f(x_0)$.

x_0 je jediný pevný bod f :

Bud'te x_0, \tilde{x}_0 pevné body f .

$$d(x_0, \tilde{x}_0) = d(f(x_0), f(\tilde{x}_0)) \leq q \cdot d(x_0, \tilde{x}_0)$$

$$q < 1 \Rightarrow d(x_0, \tilde{x}_0) = 0 \Rightarrow x_0 = \tilde{x}_0.$$

Přednáška 10.1.2011

X je úplný metrický prostor $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ každá cauchyovská posloupnost konverguje.

Příklad: $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, (C[a, b], \|\cdot\|_s)$

Banachova věta: X úplný metrický prostor, $f : X \mapsto X$ kontrakce \Rightarrow

(i) $\exists! x_0 \in X, f(x_0) = x_0$ (pevný bod f)

(ii) $\forall x \in X, f^n(x) \rightarrow x_0$

Příklad: l^2 je úplný.

$$l^2 = \{(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \|(a_n)\|_2 < \infty\}$$

$$\|(a_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2}$$

Důkaz: (a^n) necht' je cauchyovská posloupnost prvků z l^2 .

$$\forall n \in \mathbb{N} : a^n = (a_1^n, a_2^n, \dots), \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (a_i^n)^2} < \infty$$

Cauchyho podmínka: $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall m, n > n_0 : \|a^m - a^n\|_2 < \varepsilon$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (a_i^m - a_i^n)^2} < \varepsilon$$

? $a^m \xrightarrow{l^2} a$

1) zřejmě $\forall i \in \mathbb{N} : (a_i^n)_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská

$$|a_i^m - a_i^n| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (a_i^m - a_i^n)^2}$$

$$\Rightarrow a_i^n \rightarrow a_i \in \mathbb{R} \text{ (úplnost } \mathbb{R}), \text{ označme } a = (a_i)_{i=1}^{\infty}$$

2) $a \in l^2$: cauchyovská \Rightarrow omezenost

$$\exists M > 0, \|a^n\|_2 \leq M \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{limitním přechodem: } \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (a_i^m - a_i^n)^2} \leq \varepsilon \Rightarrow \|a\| \leq \underbrace{\|a^m\|}_{\leq M} + \varepsilon.$$

3) $a^n \xrightarrow{l^2} a$:

$$\|a^n - a\|_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (a_i^n - a_i)^2 = \underbrace{\sum_{i=1}^{i_0} (a_i^n - a_i)^2}_{0 \forall i_0 \in \mathbb{N}} + \underbrace{\sum_{i=i_0+1}^{\infty} (a_i^n - a_i)^2}_{\leq \sum_{i>i_0} (a_i^n)^2 + \sum_{i>i_0} a_i^2}$$

$$\left[\sum_{i>i_0} \underbrace{(a_i^{n_0})^2}_{< \varepsilon} + \underbrace{(a_i^n - a_i^{n_0})^2}_{< \varepsilon \text{ z cauchyho podmínky}} \right]$$

Aplikace Banachovy věty:

1. Přibližná řešení soustav lineárních rovnic

$$(\star) Ax = b, A \text{ matice } n \times n, x, b \in \mathbb{R}^n$$

$$Ax - x = b - x$$

$$(A - I)x = b - x$$

$$x = (I - A)x + b$$

$$L(x) = (I - A)x + b, L : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$$

afinní

hledáme pevný bod L

? je L kontrakce ?

$$\exists q < 1 : \|(I - A)x - (I - A)y\| \leq q\|x - y\|$$

$$\|(I - A)u\| \leq q\|u\| \forall u \in \mathbb{R}^n$$

pokud ano: $z \in \mathbb{R}^n$ libovolný, $z^0 = z$

$$z^n = (I - A)z^{(n-1)} + b = L(z^{(n-1)})$$

$z^n \rightarrow x \dots$ řešení (\star) .

2. Existence a jednoznačnost řešení diferenciálních rovnic

$$(\star) : y' = f(x, y), y_0 = y(x_0)$$

$$f : G \mapsto \mathbb{R}, G \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ otevřená}$$

f spojitá, $(x_0, y_0) \in G$.

(hledáme funkci $y = y(x), x \in I$)

Příklad: $y' = 2y, y(0) = -2$

$$\begin{cases} y = 0 \\ \frac{y'}{y} = 2 \rightsquigarrow \int \frac{y'}{y} dx = \int 2 dx \end{cases} \quad \log |y| = 2x + C$$

$$|y| = e^{2x+C} = e^C \cdot e^{2x}$$

$$y = K \cdot e^{2x}, (K \in \mathbb{R})$$

$$-2 = K \cdot e^0$$

$$y = -2e^{2x}$$

$$x \in \mathbb{R}$$

Věta 4.9 (Picardova):

$G \subseteq \mathbb{R}^2$ otevřená, $f : G \mapsto \mathbb{R}$ spojitá

Nechť existuje $M > 0$ tak, že $\forall (x, y), (x, z) \in G : |f(x, y) - f(x, z)| \leq M|y - z|$

Pak $\forall (x_0, y_0) \in G \exists \delta > 0$ tak, že rovnice (\star) má na intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ právě jedno řešení.

Důkaz: Bud' $\delta > 0$ (bude upřesněno)

úloha (\star) je charakteristická rovnice

$$(\star\star) : y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

označme operátor (zobrazení) $A : C[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \mapsto C[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

$$(Ay)(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

$C[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ je úplný (se supremovou normou)

A je kontrakce:

$$y, z \in C[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

$$\begin{aligned}
\|Ay - Az\|_s &= \sup_{x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta} \left| \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt - \int_{x_0}^x f(t, z(t)) dt \right| \\
&= \sup_{x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta} \left| \int_{x_0}^x (f(t, y(t)) - f(t, z(t))) dt \right| \\
&\leq \sup_{x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta} \int_{x_0}^x |(f(t, y(t)) - f(t, z(t)))| dt \\
&\leq \sup_{x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta} \int_{x_0}^x M \underbrace{|y(t) - z(t)|}_{\leq \|y - z\|_s} dt \leq \delta M \|y - z\|_s \leq \|y - z\|_s
\end{aligned}$$

$$q = \delta M < 1$$

$$0 < \delta < \frac{1}{M}$$

Použijeme Banachovu větu $\rightsquigarrow \exists! y \in C[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, $Ay = y \Rightarrow y$ řeší $(\star\star) \Leftrightarrow y$ řeší (\star) .

Příklad: $y' = \sqrt{1 - y^2}$

$$\frac{y'}{\sqrt{1 - y^2}} = 1$$

$$\arcsin y = x - C$$

$$y = \sin(x - C), \quad x \in (C - \frac{\pi}{2}, C + \frac{\pi}{2}), \quad C \in \mathbb{R}$$

$y = \pm 1 \dots$ také řešení.